SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

۲-۱۳ حل تمرین (۲۰۴)

شنبه ۳ ۸۳/۱/۷

مهسا محمدی

مقاومت مصالح ۱

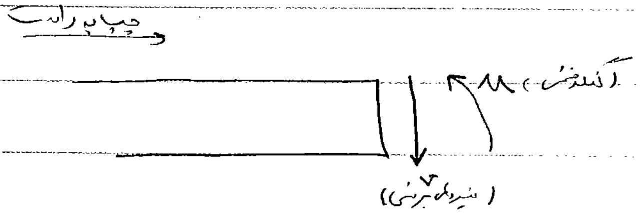
استاد سیروس غلامپور

دانشگاه صنعتی شریف

STAEDTLER

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )



در تیر :

بازو = سطح مقطع مستطیلی

میله = سطح مقطع دایره‌ای

بارگذاری محوری = یعنی در امتداد یک محور نیرو وارد شود [مثلاً فقط در امتداد محور x ها به سازه نیرو وارد شود]

بارگذاری چند محوری = یعنی در امتداد چند محور نیرو وارد شود [مثلاً در امتداد هر سه محور مختصات به سازه نیرو وارد شود]

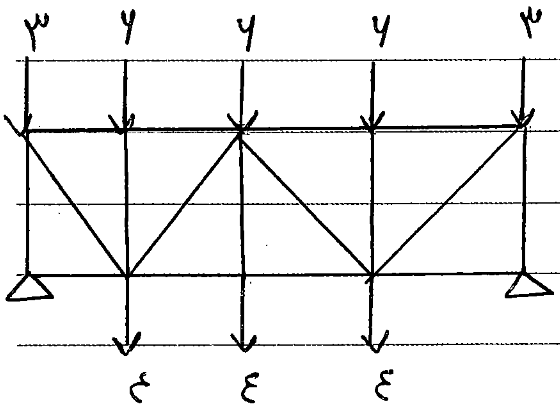
الف) محاسبات سازه

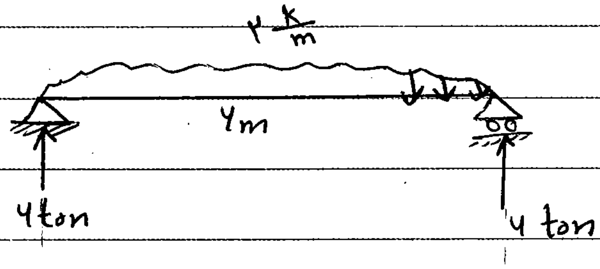
۱) بارگذاری لنگر و نیرو: تعیین کنیم بار خارجی به بر سازه وارد می شود
به کجا وارد می شود و مقدار آن چقدر است [یعنی تعیین نیروها و لنگرهای
خارجی وارد بر سازه] ، [بارگذاری ، مهندسی زلزله ، پل سازی ...]

۲) تحلیل (استاتیک ـ تحلیل سازه های ۱ و ۲): (نیروی داخلی را
تعیین سازه های معین / تعیین سازه های نامعین
بدست می آوریم) تعیین نیروها و لنگرهای داخلی وارد بر سازه

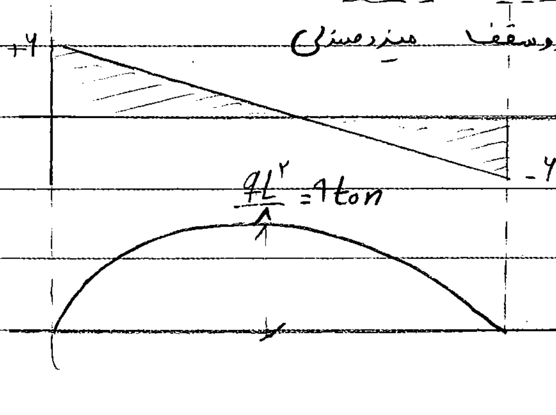
۳) طراحی: مقاومت مصالح ۱ و ۲ (طراحی سازه) ـ طراحی سازه های
به مقاومت مصالح بستگی دارد
فولادی ۱ و ۲ ـ طراحی سازه های بتن آرمه ۱ و ۲

ب) اجراء





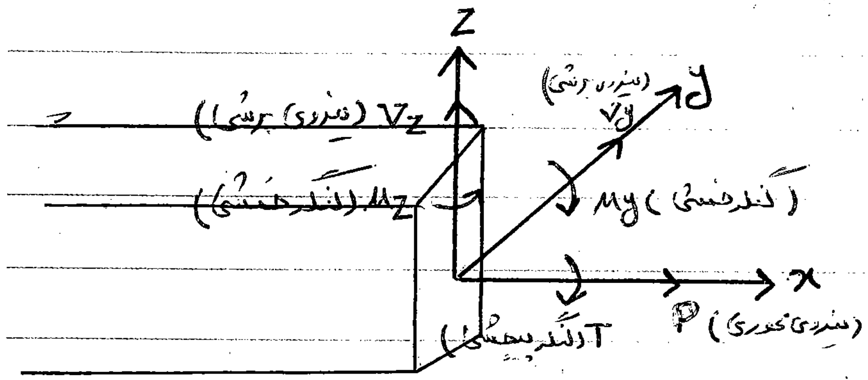
بارگذاری: بار ثقلی یا بار عمودی ـ بار جانبی یا افقی
(بار مرده و بار زنده) (زلزله ـ باد ـ ...)
دیوار و سقف میز و صندلی



SUBJECT :

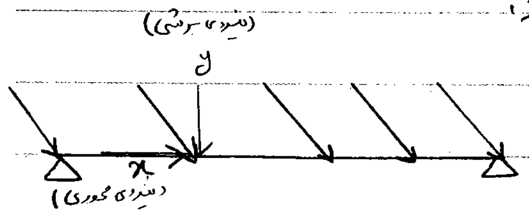
Year ( ) Month ( ) Date ( )

یک مقطع: ۳ نیرو و ۳ لنگر دارد.



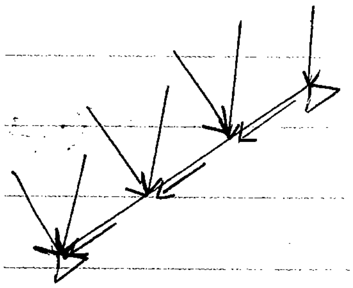
در خرپا فقط نیروی محوری داریم چون عضو دو نیرویی دارد.

P

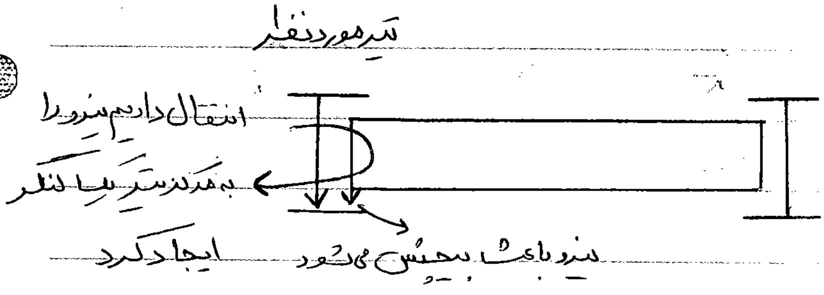


در تیر: حتما نیروی برشی و لنگر خمشی هست

نیروی محوری هم در تیر می تواند وجود داشته باشد مانند: تیرهای مورب یا تیر سقف راه پله



یک تیر می تواند پیچش هم داشته باشد



نکته:

بارگذاری برای تحلیل مهم است ـ برای طراحی، تحلیل مهم است

در نیروی محوری، علامت مهم است. چون مقاومت مصالح در کشش و فشار با هم فرق می کند

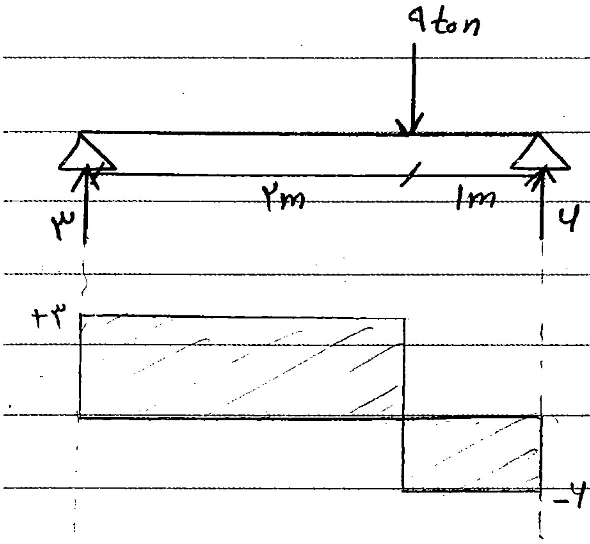
رفتار مصالح در کشش و فشار با هم فرق دارد.

SUBJECT :

Year (   ) Month (   ) Date (   )

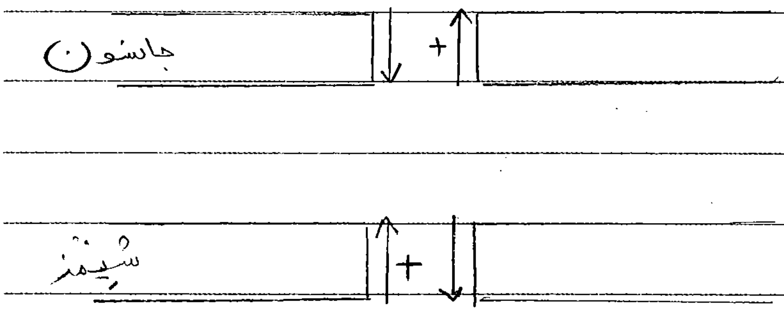
نتیجه: در طراحی می‌خواهیم انجام دهیم علامت مهم است

مقاومت برشی مصالح در مثبت و منفی فرقی ندارد.



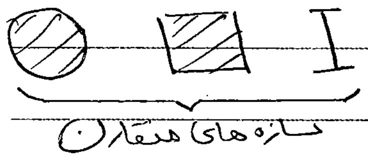
این تیر باید تحمل 6ton برش را داشته باشد علامت مهم نیست

نکته:



نکته: نمودار پیچشی هم در علامت فرق ندارد اما نمودار خمشی در علامت مهم است

فقط برای سازه‌های متقارن علامت در نمودار خمشی مهم نیست!



اما برای سازه‌های غیرمتقارن مانند: بتن آرمه T علامت مهم است.

در نمودار خمشی و نیروی محوری علامت مهم است ولی در نیروی برشی و نمودار پیچشی علامت مهم نیست و قراردادی است.

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

نکته: نیرو و لنگر برای مقطع است = اثر متقابل
تنش برای نقطه است = مقاومت مصالح
و برای رسیدن به نقطه باید مقطع بزنیم

« فصل اول »

« stress مفهوم تنش »

تنش: نیروی وارد بر واحد سطح

محوری (نیروی داخلی) — برشی (نیروی داخلی)

نیروی محوری همواره در راستای محوری عضو و عمود بر مقطع می‌باشد

تنش قائم (محوری): نیروی محوری وارد بر واحد سطح

$$\sigma_{Ave} = \frac{P}{A}$$

سیگما، تنش قائم، نیروی محوری، مساحت مقطع

نیروی برشی مماس بر مقطع و عمود بر محور می‌باشد

تنش برشی: نیروی برشی وارد بر واحد سطح

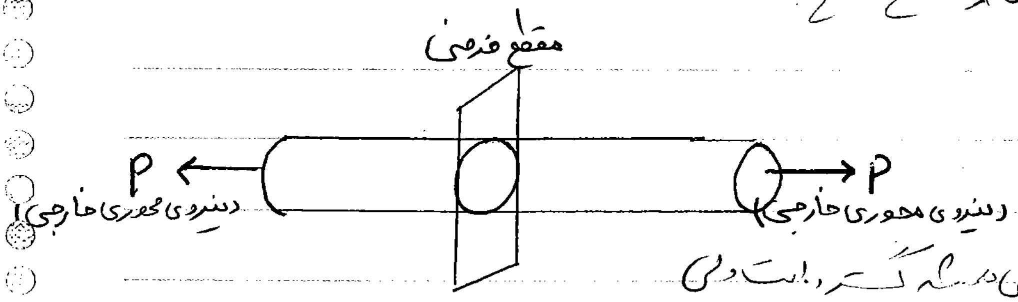
$$\tau_{Ave} = \frac{V}{A}$$

تنش برشی (تائو)، نیروی برشی، سطح مقطع

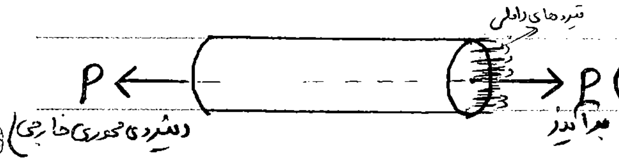
در مورد تنش به توزیع تنش وابسته است

$\sigma_{Ave} = \frac{P}{A}$ و $\tau_{Ave} = \frac{V}{A}$ بیان مقدار میانگین تنش روی مقطع است

به جای این که تنش در نقطه‌ای به خصوص از سطح مقطع باشد



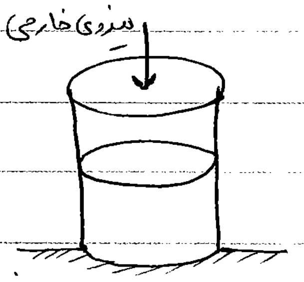
نکته: وقتی برش می‌زنیم نیروهای داخلی همیشه گسترده است ولی
نیروی خارجی هم متمرکز و هم گسترده می‌تواند باشد.



(نیروی محوری داخلی)

نکته: اگر بار یا نیروهای خارجی گسترده باشند توزیع تنش یکنواخت است
اگر بار یا نیروی خارجی متمرکز باشد توزیع تنش بعد از مقطع
یکسان نیست و تنش در مرکز بیشتر است.

- نیروی متمرکز یا نقطه‌ای بر سطحی وارد می‌شود که در مقایسه با سطح کل بسیار ناچیز است.



- نیروی داخلی همیشه گسترده است.

- نیروی خارجی می‌تواند هم گسترده هم نقطه‌ای باشد.

تنش محوری یا قائم $\sigma = \frac{P}{A}$

$$10^3 \frac{kg}{cm^2} = 1 \frac{ton}{cm^2}$$

$$psi = \frac{lb}{in^2}$$

$$ksi = \frac{kLb}{in^2}$$ (کیلو)

$$1 \text{ میلیون } pa = 1\ \text{M}pa = \frac{N}{mm^2}$$ (10^6، مگا)

$$pa = \frac{N}{m^2}$$

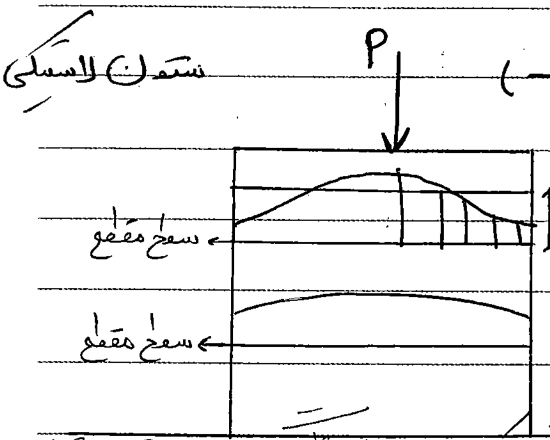
SUBJECT :

Year (   ) Month (   ) Date (   )

نکته: علامت تنش همیشه به علامت نیرو بستگی دارد (نیروی کششی مثبت است)

اگر نیروی محوری کششی (+) ⟵ تنش کششی (+)

اگر نیروی محوری فشاری (−) ⟵ تنش فشاری (−)

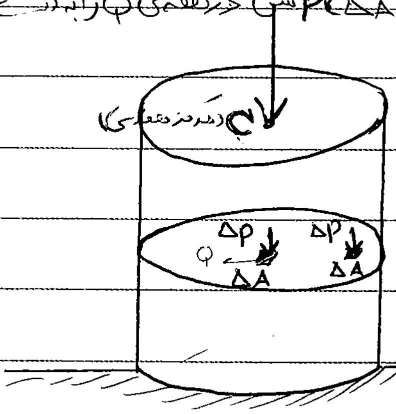


$$\sigma_{Ave} = \frac{P}{A}$$

هرچه فاصله بیشتر شود، تنش یکنواخت‌تر شد.

پس تنش به فاصله و جنس مصالح بستگی دارد.

برای تعریف تنش در نقطه‌ی مفروض Q از مقطع عرضی، می‌بایست یک سطح کوچک ΔA را در نظر بگیریم. با تقسیم مقدار ΔP بر ΔA مقدار میانگین تنش روی ΔA را بدست آوریم. با میل دادن ΔA به $\circ$ ⟵ PΔA تنش در نقطه‌ی Q را بدست می‌آوریم.



$$\sigma = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta A} = \frac{dP}{dA}$$

ص ۶ جانسون

$$dP = \sigma \cdot dA \Longrightarrow \boxed{P = \int \sigma \cdot dA}$$

برآیند نیروهای داخلی است.

اگر σ ثابت باشد یا ثابت فرض شود ⟵ $P = \sigma \cdot A$ یا $\sigma = \frac{P}{A}$

یعنی توزیع تنش یکنواخت باشد.

هرجا σ بود منظور σ_{Ave} است.

تنش قائم
- تنش موجود (ما بدست می‌آوریم)
- تنش مجاز (صورت مسئله می‌دهد) که در آزمایشگاه بدست می‌آید.

کنترل

اگر تنش موجود < تنش مجاز ⟸ گسیختگی اتفاق نمی‌افتد

تنش نهایی

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

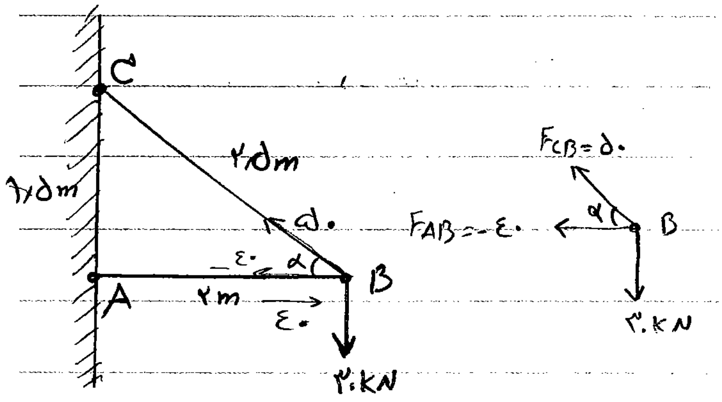
کنترل :

$$\sigma_{موجود} = \frac{P_{موجود}}{A_{موجود}} \leqslant \sigma_{مجاز} \quad okk ✓$$

در غیر این صورت یا باید سطح را مقطع بزرگتر کرد یا جنس را قوی‌تر کرد.

مثال : الف) میله‌ی BC به قطر ۲۰mm و از فولاد با $\sigma = 140\ Mpa$ کنترل نمایید

سطح مقطع دایره‌ای



$\alpha = \mathrm{Arc\tan}\frac{1.5}{2} \Rightarrow \alpha = 37°$

$\Sigma F_y = 0 \longrightarrow$

$\Sigma F_x = 0 \longrightarrow$

تحلیل :

$F_{BC} = 50$ کششی

$F_{AB} = -40$ فشاری

طراحی :

$$140\ Mpa = \frac{N}{mm^2} \qquad \sigma_{موجود} = \frac{50\times10^3\ N}{\pi(10)^2 mm^2} = 159\frac{N}{mm^2} \text{ یا } Mpa \leqslant 140\ Mpa \quad okk ✓$$

طرح اقتصادی است

$$\boxed{\sigma_{مجاز} = \frac{\sigma_{\text{نهایی یا گسیختگی}}}{\text{ضریب اطمینان } S.F} = \frac{240\ Mpa}{1.5} = 140\ Mpa}$$

چون σ نهایی ۲۴۰ بوده چون ما به ۱٫۵ تقسیم کرده‌ایم در آن گسیختگی ...

چون بارگذاری، تحلیل، طراحی با خطا و تقریب است از ضریب اطمینان استفاده می‌کنیم و بیشتر ضریب اطمینان را برای آن به کار می‌بریم که در اجرا نیز خطا وجود دارد و ضریب اطمینان بستگی به دقیق بودن محاسبه و اجرا و دستگاه و به نوع سازه دارد که چی می‌خواهیم بسازیم

— ظرفیت باربری : $\underset{\text{حداکثر مجاز}}{\overset{?}{P}} \leqslant \sigma_{مجاز} \cdot A_{موجود}$ به سمت پایین رند می‌شود

— طراحی : $\underset{\text{حداقل مورد نیاز}}{\overset{?}{A}} \geqslant \frac{P_{موجود}}{\sigma_{مجاز}}$ به سمت بالا رند می‌شود

ب) قطر میله BC از آلومینیوم با $\sigma_{مجاز} = 100\ Mpa$ را طراحی نمایید.

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

$$A = \frac{P}{\sigma} = \frac{\overbrace{50\times10^3}^{F_{BC}}}{100} = 500\,mm^2 = \frac{\pi d^2}{4}$$

قطر لازم $d = 25.2\,mm$

طراحی $\boxed{d = 24\,mm}$

یادآوری:

تنش قائم (محوری): نیروی محوری وارد بر واحد سطح

$$\underset{\text{سیگما}}{\sigma_{Ave}} = \frac{P_{\text{نیروی محوری}}}{A_{\text{مساحت مقطع}}}$$

تنش برشی: نیروی برشی وارد بر واحد سطح

$$\underset{\text{تاو یا تو}}{\tau_{Ave}} = \frac{V_{\text{نیروی برشی}}}{A_{\text{مساحت مقطع}}}$$

نیروی برشی یعنی عمود وارد شود

+ یا منفی بودن تنش قائم به P بستگی دارد و + یا - تنش برشی به V بستگی دارد.

تنش برشی + با تنش برشی - فرقی ندارد.

اگر در صورت مسئله نیروی محوری کششی بود برای کنترل باید این صوری عمل کنیم

$$\sigma_{\text{موجود کششی}} = \frac{P_{\text{موجود کششی}}}{A_{\text{موجود}}} \leq \sigma_{\text{مجاز کششی}}$$

" " " " " " " " فشاری بود " "

$$\sigma_{\text{موجود فشاری}} = \frac{P_{\text{موجود فشاری}}}{A_{\text{موجود}}} \leq \sigma_{\text{مجاز فشاری}}$$

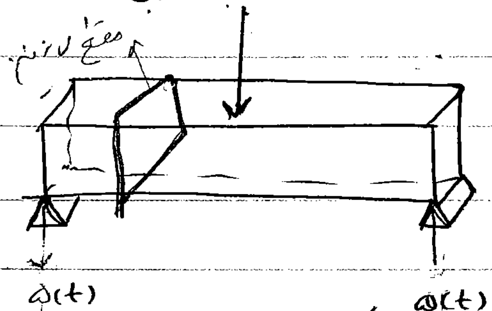
پس نیروی کششی و فشاری با هم فرق دارند اما نیروی برشی (+) یا (-) فرق نمی‌کند.
(-) (+)

STAEDTLER

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

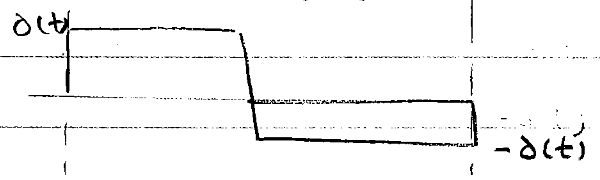
نکته: معمولاً تنش های برشی در پیچ ها، پین ها و میخ پرچ ها، برای اتصال عضوهای مختلف سازه ها و اجزای ماشین به کار می‌روند، یافت می‌شوند
مثال: تیر چوبی



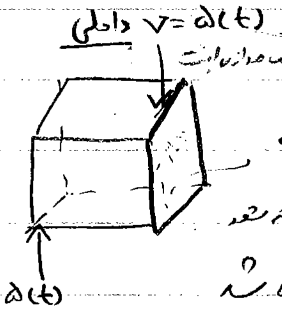
(مثال برای تنش برشی)

نیروی داخلی مقطع ما نیروی برشی است:

بار خارجی = کل الوارد به تکیه گاه



دیاگرام مقطع:



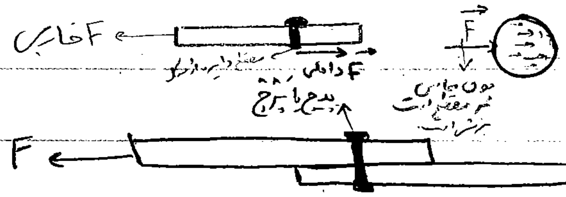
$$\tau_{Ave} = \frac{V}{A} < \tau_{مجاز}$$

متوسط تنش

در اصل باید $\tau_{max} < \tau_{مجاز}$ باشد (ابعاد افزوده می‌شود)

* در این جا τ مثبت است چون در این دیاگرام نیروی برشی 5(t)+ است طبق نمودار نیروی برشی *

مثال: فرض کنیم دو ورق را با پیچ ببندیم و با نیروی F بکشیم

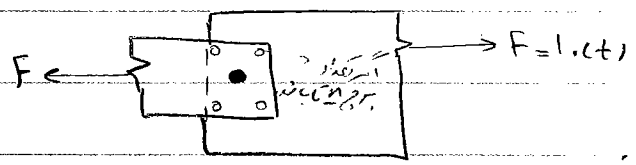


$$\tau = \frac{F}{\frac{\pi d^2}{4}} \quad ①$$

ادامه در پایین صفحه

برای دایره (شعاع $\pi r^2 = \frac{\pi d^2}{4}$ قطر)

دیاگرام وقتی از بالا به آن نگاه می‌کنیم:



نکته: اگر مقطعی که ما رسم کنیم عمود بر F باشد تنش قائم و اگر مماس بر آن باشد تنش برشی است.
با موازی

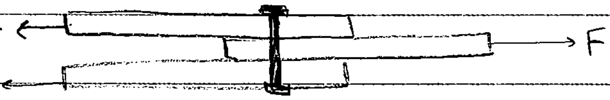
ادامه ①: $\tau = \frac{F_{داخلی}}{n \times \frac{\pi d^2}{4}} < \tau_{مجاز\ پیچ\ یا\ پرچ}$ ⟸ در صورتی که همه پیچ‌ها مثل هم باشند (از نظر قطر جنس) (اگر تعداد پیچ n تا بود) ###

n ← تعداد پیچ یا پرچ

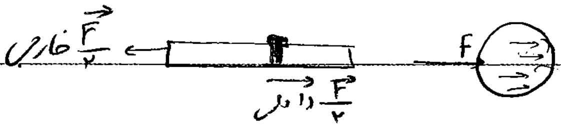
مثلاً اگر پیچ‌ها از نظر قطرها فرق داشتند (مثلاً یکی قطرش 2mm و 4 تا دیگر 3mm باشد) آن گاه:

$$\tau = \frac{F}{1 \times \frac{\pi(2)^2}{4} + 4 \times \frac{\pi(3)^2}{4}}$$

اگر اتصال دو برشی باشد یعنی برای جدا کردن
اتصال به ۲ برش داشته باشیم



مثلا در شکل (الف) نشان: اگر ۳ تا ورق داشتیم ۲ برش می‌شود. اگر ۴ تا ورق داشته ۳ برش می‌شود



دیاگرام ورق بالایی:

$$\tau = \frac{\frac{F}{2}}{\frac{\pi d^2}{4}}$$

کنترل:

$$\tau = \frac{F}{n.m.\frac{\pi d^2}{4}} \leq \tau_{\text{مجاز پیچ یا پرچ}}$$

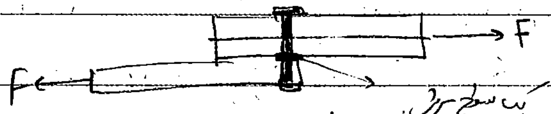
n = تعداد پیچ یا پرچ

m = تعداد سطوح برش هر پیچ

مساحت پرچ‌ها $= n.m.\frac{\pi d^2}{4}$

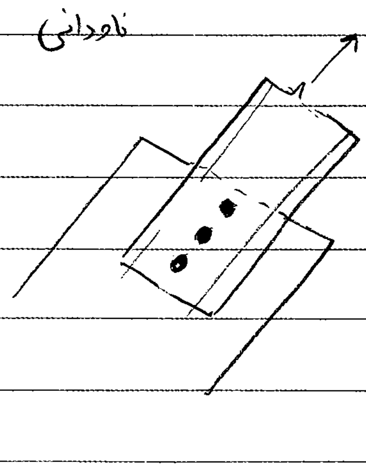
$\boxed{n.m = \text{تعداد سطوح برش}}$

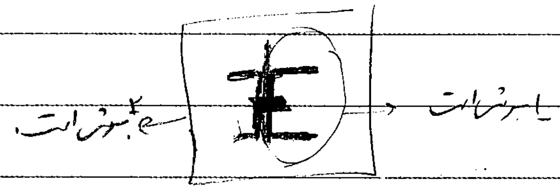
(الف) زمانی می‌توانیم بگوییم که تعداد سطوح برش یکی از تعداد ورق‌ها کمتر است که تعداد ورق‌های میانی در خلاف جهت هم باشند

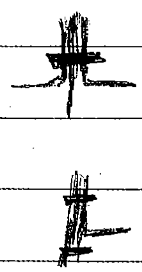


(شکل الف)

ناودانی







اتصال ۱ برش که ۲ تا پیچ دارد و ۱ سطح برش.

SUBJECT :
Year ( ) Month ( ) Date ( )

کنترل: $\tau_{\text{موجود}} = \frac{V_{\text{موجود}}}{A_{\text{موجود}}} \le \tau_{\text{مجاز}}$

ظرفیت باربری (به سمت پایین روند شود) $V_{\text{حداکثر}} = \tau_{\text{مجاز}} \times A_{\text{موجود}}$

طراحی: (به سمت بالا روند شود) (d را به سمت بالا روند می‌کنیم) $A_{\text{حداقل لازم}} = \frac{V_{\text{موجود}}}{\tau_{\text{مجاز}}}$

در طراحی F موجود معلوم است و A مجهول است.

نکته: (ا معادله ۲ مجهول بی‌نهایت جواب دارد) مثل: $2x+3y=10$

در جوش مساحت جوش برابر است: تعداد جوش × طول جوش × ضخامت جوش (در مقاومت مصالح است)

تنش لهیدگی (تکیه‌گاهی):

(حالت خاصی از تنش قائم است)

$\sigma_B = \frac{P}{A} \le \sigma_{B_{\text{مجاز}}}$ تنش لهیدگی مجاز

$\sigma_{B_{\text{مجاز}}}$ = براساس مشخصات معلوم است

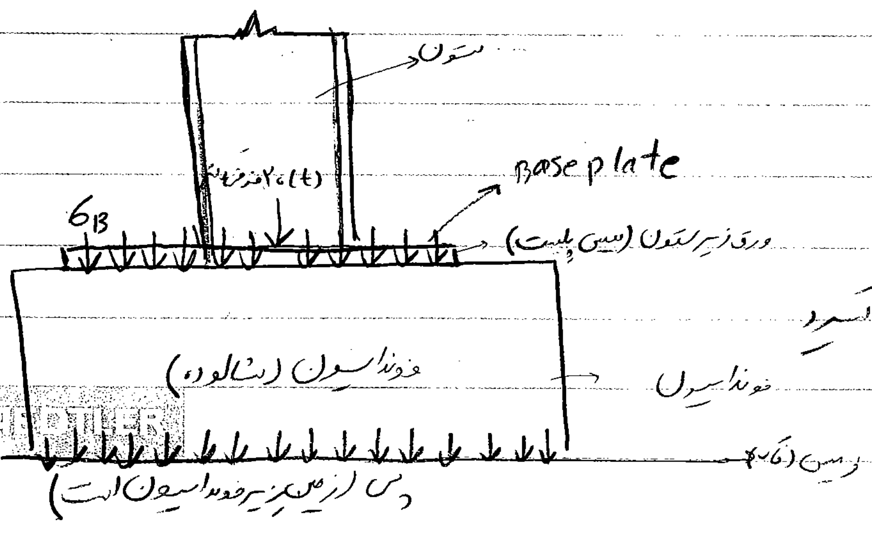
اونی که ضعیف‌تر است را [illegible] هر کدام از این دو جسم مجاز

و فرق آن با تنش قائم این است که اگر دو جسم را به صورت تکیه‌گاهی به هم وصل کنیم امکان دارد یکی له شود (اونی که σ کمتری دارد = ضعیف‌تر است له می‌شود)، به هم فشار وارد می‌کنند ولی له می‌شود.

تنش لهیدگی (تکیه‌گاهی) بین ۲ دو جسم است و فقط سطح [illegible] که به معادله می‌رود فشاری است و (خاص است)

اما تنش قائم داخل یک جسم است و [illegible]

ستون فولادی



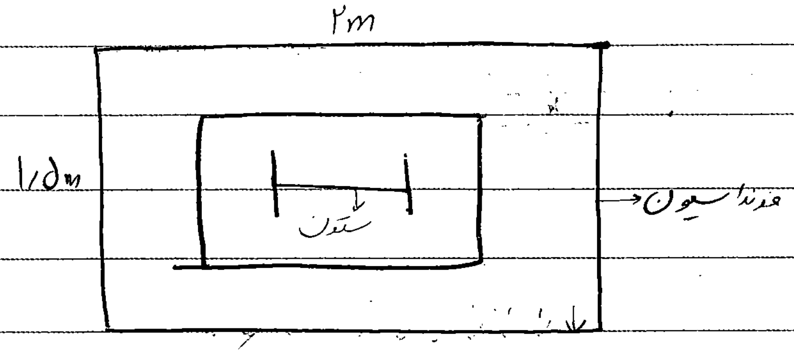
σ_B = تنش لهیدگی

کنترل: $\sigma_B = \frac{P}{A} \le \sigma_{B_{\text{مجاز}}}$

پی: خاکی که بار را روی آن قرار می‌گیرد

SUBJECT :

Year (   ) Month (   ) Date (   )



از بالا به شکل مقطع مقابل نگاه کنیم

چند جا ممکن است گسیختگی اتفاق بیفتد (بین هر ۲ جسم) =

وقتی در جسم بین فونداسیون را در نظر می‌گیریم (کنترل می‌کنیم) باید $A = ۲/۵ \times ۱/۵$ (مساحت فونداسیون) و P آن هم می‌شود ۲۰t به علاوه‌ی

وزن فونداسیون که: $\frac{۲۰t + w}{۲/۵ \times ۱/۵} \le \sigma_B$ خاک (بین)

چون خاک را در نظر می‌گیریم چون ضعیف‌تر است.

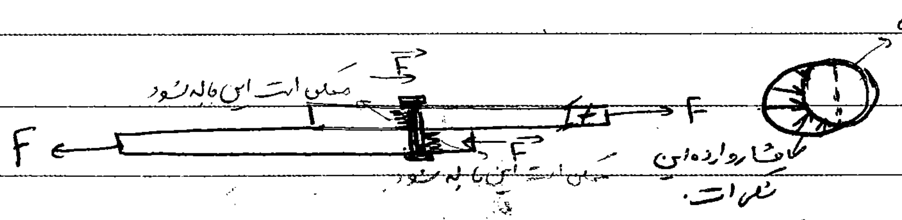
بین فونداسیون و بیس پلیت هم تنش گسیختگی وجود دارد.

$P = ۲۰t + w$

وزن بیس پلیت

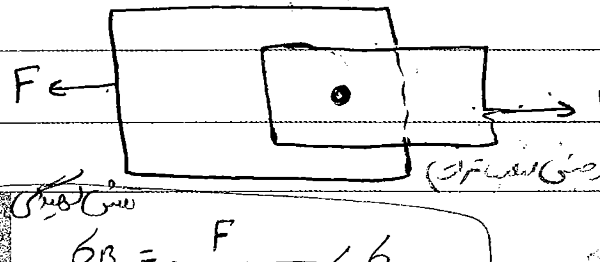
برای سطح مقطع را مثل مستطیل ... آن را در نظر می‌گیریم که سطح مقطع کمتری دارد.

بین بیس پلیت و ستون تنش به همان شکل دارد که کدام ضعیف‌تر و قوی‌تر است.



اگر سطح استوانه را تصویر کنیم

یک مستطیل به ابعاد $d \times t$ می‌شود)



$$\sigma_B = \frac{F}{t \cdot d} \le \sigma_{B_{\text{مجاز}}}$$

اونی که ضعیف‌تر است را قرار می‌دهیم

بستگی به جنس دارد (اونی که از نظر جنس ضعیف‌تر است)

را می‌گذاریم

تنش گسیختگی

$$\sigma_B = \frac{F}{n \cdot t_{min} \cdot d} \le \sigma_{B_{\text{مجاز}}}$$

تعداد پیچ یا پرچ

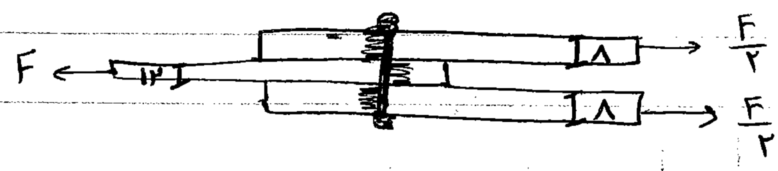
ضخامت کمتر

قطر پیچ یا پرچ

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

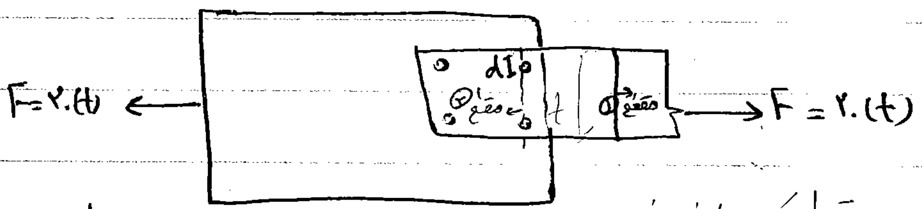
۲ برشی

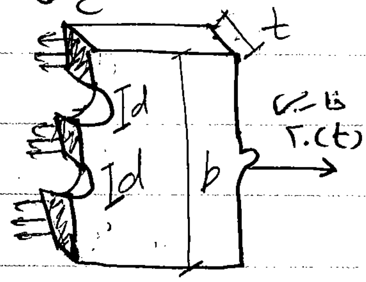


اگر ۱ برشی بود t_{min} اونی که نازکتر است را در نظر بگیر

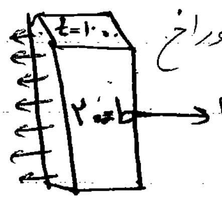
اگر ۲ برشی بود متفاوت ۱ ورق را با مجموع ۲ ضخامت ۲ ورق دیگر در نظر میگیریم و اونی که کوچکتر است را در نظر بگیر

اگر ۳ برشی بود مجموع ۲ تا ورق را با مجموع ۲ تا ورق دیگر بررسی میکنیم و اونی که کوچکتر است را در نظر میگیریم





اگر F فشاری باشد در مقطع ۱ سوراخ نیست



فقط جهت نیروها عوض میشود اما در یک سوراخ خارجی

هم جهت برش نیرو و هم در داخل خود سوراخ نیرو وجود دارد

$$\sigma = \frac{۲۰}{۱\times ۲۰} = ۱ \ \frac{(t)}{cm^2}$$ (تعداد سوراخ ها مهم نیست)

① مقطع $b\times t$

بیشترین تنش

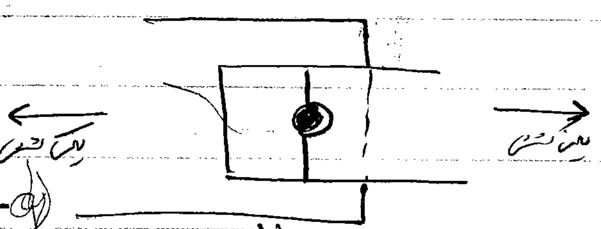
$$\sigma_{max} = \frac{P}{A_n} = \frac{P}{t(b-2d)}$$

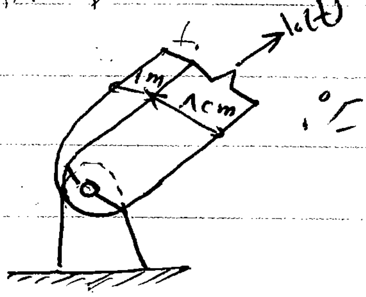
سطح مقطع خالص

که در این حالت دو تا سوراخ کم میکنیم

منهای ۲ سوراخ کوچک

$$\sigma = \frac{۲۰}{۱(۲۰-۲\times۲)} = ۱٫۲۵$$



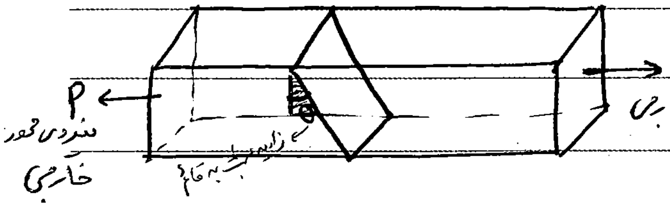


سطح مقطع = ۸cm×۱cm منهای قطر دایره

تنش فشاری هم بود سطح مقطع تغییر نمیکند

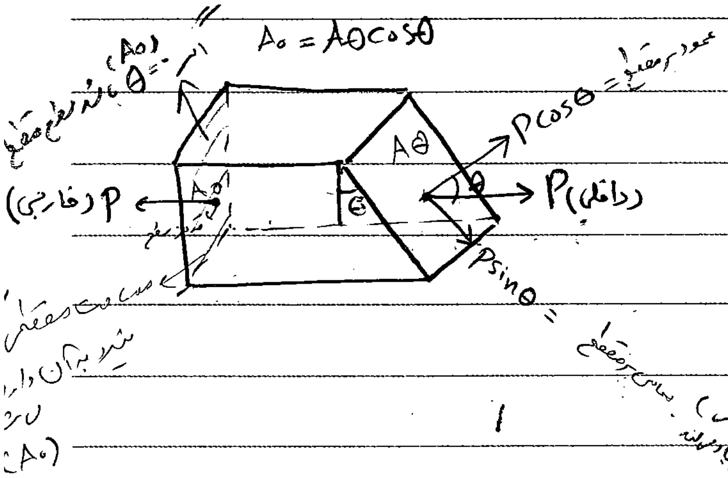
تنش در مقاطع مورب (مایل) تحت بار محوری :

پس در مقاطع مورب دو نوع تنش داریم { تنش قائم / تنش برشی

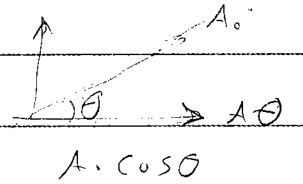


θ = زاویه ای است که سطح مورب با عمود بر نیرو می سازد (تنش قائم)

$A_0 = A_\theta \cos\theta$



A_0 = مساحت سطح مقطع عمود بر مقطع



حال برای ... با توجه به شکل بالا

تنش قائم

$$\sigma_\theta = \frac{P\cos\theta}{A_\theta} = \frac{P\cos\theta}{\frac{A_0}{\cos\theta}} = \frac{P}{A_0}\cos^2\theta < \sigma \quad ①$$

مجاز چسب یا جوش

اگر θ = 0 باشد آن سطح مقطع عمود ... در دو حالت ...

تنش برشی

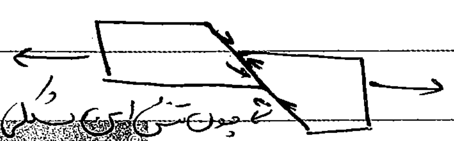
$$\tau = \frac{P\sin\theta}{A_\theta} = \frac{P\sin\theta}{\frac{A_0}{\cos\theta}} = \frac{P}{A_0}\sin\theta.\cos\theta = \frac{P}{2A_0}\sin 2\theta < \tau \quad ②$$

مجاز چسب یا جوش

اگر ① و ② برقرار نباشد :

چون تنش این شکلی است و چسب کنده می شود پس $\sigma_\theta < \sigma$ مجاز نیست

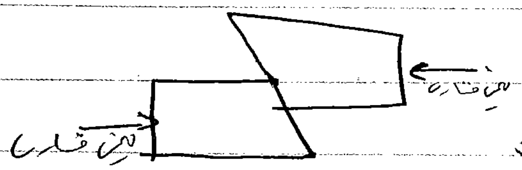
اگر ① و ② برقرار باشد هیچ اتفاقی در چسب یا جوش ها اتفاق نمی افتد



چون تنش این شکلی است و چسب بریده شده پس $\tau < \tau$ مجاز نیست

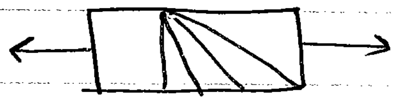
SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )



این با هم برش است
اما شده و فشار است
به صحبت شده ها نوشته شود

اگر بخواهند دو تا چوب را به هم بچسبانیم بهترین زاویه کدام است؟
اگر یک مقطعی یا یا پاره ای چوب در اختیار داشته باشیم.



** ۴۵° بیشترین تنش برش را دارا است **

هر عضوی که تحت کشش یا فشار باشد باید چک شود

یعنی هر عضوی یا پاره ای که داشتیم با یادمان تنش مشتق بگیریم و max و min آن را بدست آوریم.

$$\sigma_\theta = \frac{P}{A_0}\cos^2\theta \qquad \frac{d\sigma_\theta}{d\theta} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \theta = 0 \Rightarrow \boxed{\sigma_{max} = \frac{P}{A_0} \leq \sigma} \\ \theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sigma_{min} = 0 \end{cases}$$

مجاز چسب یا فولاد

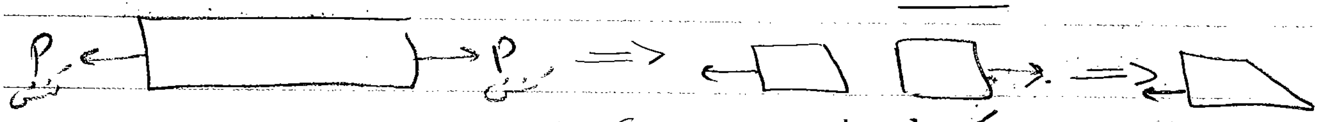
$$\tau_\theta = \frac{P}{2A_0}\sin 2\theta \qquad \frac{d\tau_\theta}{d\theta} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \theta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \boxed{\tau_{max} = \frac{P}{2A_0} \leq \tau} \\ \theta = 0, \frac{\pi}{2} \Rightarrow \tau_{min} = 0 \end{cases}$$

مجاز چسب یا فولاد

اگر یک عضوی یا پاره ای تحت کشش یا فشار بود در صورتی تنش تاج دارد که $\theta = 0$ باشد و $\sigma_{max} = \frac{P}{A_0} \leq \sigma$

مجاز چسب یا فولاد یا در یک عضو

اگر عضوی یا پاره ای را بخواهیم ببریم در صورتی بریده می شود که $\theta = \frac{\pi}{4}$ باشد. و در صورتی کنده می شود که $\theta = 0$ باشد



کنده شد یعنی $\sigma_{max} \leq \sigma$ نیست

بریده شده

یعنی $\tau_{max} \leq \tau$ نیست

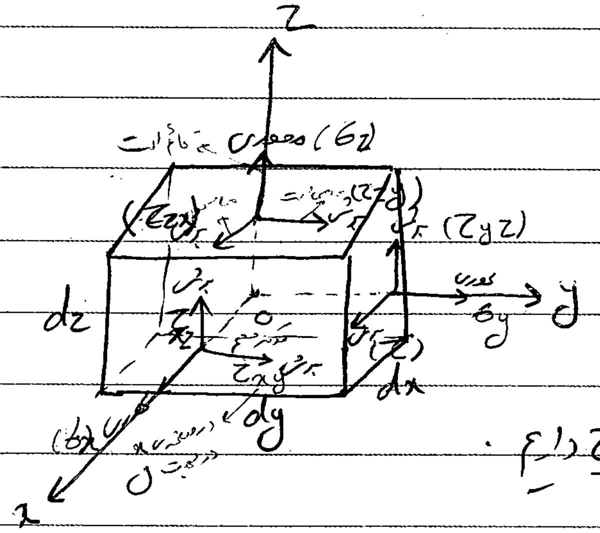
SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

اگر عضو یک بار وجود داشت نتیجه $\sigma_{max}=\frac{P}{A_0}\le\sigma_{مجاز}$ و $\tau_\theta=\frac{P}{2A_0}\le\tau_{مجاز}$ را کنترل کنیم دیگر لازم
یعنی چسب وجود نداشتیم

یک بار به شیوه چسب وجود داشت بنابراین به ۲ فرمول $\sigma_{max}=\frac{P}{A_0}\cos^2\theta\le\sigma$ و $\tau_{max}=\frac{P}{2A_0}\sin2\theta\le\tau$
را کنترل کردیم باید ۲ فرمول بالایی برای یک بار دیگر هم کنترل کنیم

مولفه‌های تنش:



یک المان است.

در هر مقطع یک تنش عمودی و دو تا تنش برشی داریم.

پس همیشه در هر سطح دلخواهی یک σ و دو تا τ داریم.

بنابراین:

σ_x و σ_y ، σ_z

$$\begin{cases}\tau_{xy}=\tau_{yx}\\ \tau_{xz}=\tau_{zx}\\ \tau_{zy}=\tau_{yz}\end{cases}$$

پس به جای ۹ تا مجهول ۶ تا مجهول داریم

تنش برشی جای اندیس‌ها را می‌توان عوض کرد ①

نتیجه که باید اثبات شود: و در دو سطح عمود بر هم ~~...~~ تنش‌ها به یک اندازه هستند با هم برابرند ②

اثبات:

اگر $\Sigma M_z=0$ باشد آنگاه اثبات می‌شود که $\tau_{xy}=\tau_{yx}$ ، اگر $\Sigma M_y=0$
باشد آنگاه $\tau_{xz}=\tau_{zx}$ اثبات می‌شود و اگر $\Sigma M_x=0$ باشد $\tau_{zy}=\tau_{yz}$ اثبات می‌شود

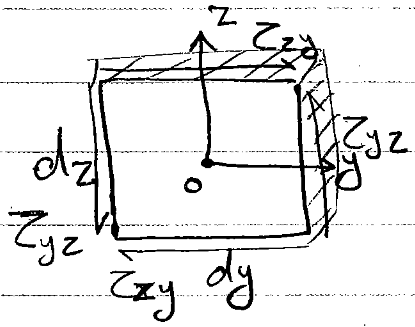
SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

اثبات : $\tau_{zy} = \tau_{yz}$:

صفحه ی zy را در نظر می گیریم :

$\tau = \frac{P}{A}$



$$\sum M_x = 0 \Rightarrow \underbrace{\tau_{zy}(dx \times dy)}_{\text{نیرو}} \times \underbrace{dz}_{\text{فاصله}} = \underbrace{\tau_{yz}(dx \times dz)}_{\text{نیرو}} \underbrace{dy}_{\text{فاصله}} \Rightarrow \overset{\text{ثابت شد}}{\boxed{\tau_{zy} = \tau_{yz}}}$$

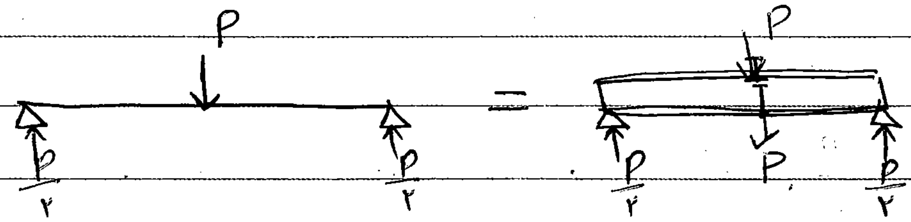
می توان این تنش ها را به صورت ماتریس متقارن نشان داد :

این تنش ها با هم برابرند

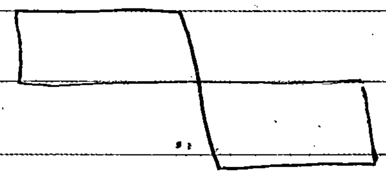
$$\begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix}$$

قطر اصلی تنش ها

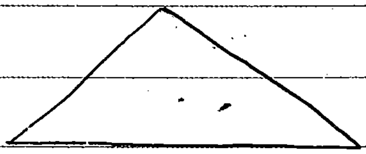
«فصل دوم» «رابطه‌ی تنش ـ تنجش و تغییر طول اعضا تحت بار محوری»



برش



خمش



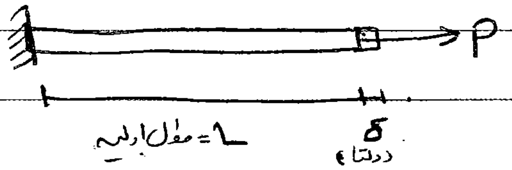
برای یک تیر آهن عملاً فرقی نمی‌کند بار محوری آن بالا باشد یا داخل آن باشد اما در استاتیک فرق می‌کند چون ما اجسام را صلب فرض می‌کردیم. وقتی در استاتیک صلب فرض می‌کردیم که فرض دقیقی نیست اما با این وجود به محاسبات استاتیک لطمه وارد نمی‌کرد چون در نهایت عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی که ما در استاتیک می‌خواستیم درست بدست می‌آمد (صلب = تغییر شکل نمی‌دهد)

(در این فصل منظور از تغییر شکل تغییر طول است که اگر نیرو + باشد (کششی) افزایش طول داریم و اگر نیرو ـ باشد (فشاری) کاهش طول داریم)

stress (تنش) : نیروی وارد بر واحد سطح $\sigma = \frac{P}{A}$ تنش قائم یا محوری

میله‌ی الاستیکی

این میله تحت کشش است



دلتا
$\delta =$ تغییر طول

strain (تغییر طول نسبی / کرنش / تنجش)

تغییر طول نسبی
تغییر طول

$\varepsilon = \frac{\delta}{L}$: تغییر طول واحد طول

واحد ندارد یعنی بدون بعد است

$L =$ طول اولیه

L همیشه مثبت است بنابراین علامت ε به δ بستگی دارد که اگر δ + باشد (کششی) ε هم مثبت است

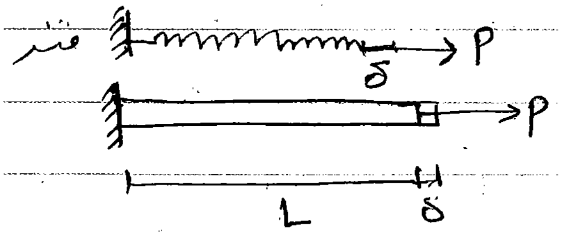
SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

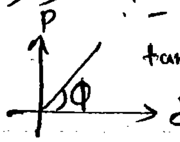
* ε تغییر طول واحد طول را می‌دهد یعنی مثلاً تغییر طول 1m یا 1mm یا 1in و ... را می‌دهد *

مثلاً اگر $\delta = ۲mm$ و $L = ۲۰۰mm$ باشد $\varepsilon = \frac{۲}{۲۰۰} = ۰٫۰۱$ می‌شود؛ یعنی 1mm، ۰٫۰۱ تغییر طول دارد.

قطعاً بین تنش و تغییر شکل رابطه وجود دارد یعنی طبق رابطه‌ی $\sigma = \frac{P}{A}$ هر چه P بیشتر باشد σ بیشتر می‌شود و در نهایت طبق رابطه‌ی $\varepsilon = \frac{\delta}{L}$ هر چه نیرو بیشتر باشد ε هم بیشتر می‌شود مثل شکل صفحه‌ی قبل (میله‌ی آلومینیومی)



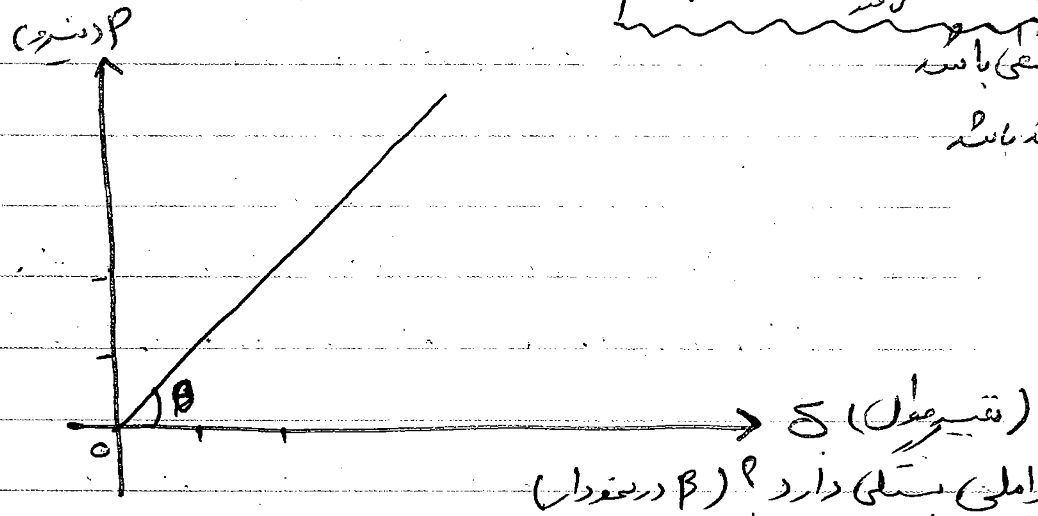
در حقیقت نمودار میله با فنر فرض می‌کند



$\tan\phi = k$

$k = \frac{P}{\delta}$ سفتی فنر

فرض می‌کنیم رابطه خطی باشد یعنی متغیرها هم‌توان باشند



شیب نمودار به چه عواملی بستگی دارد؟ (β در نمودار)

δ به ۴ عامل بستگی دارد P، L، E و A طبق رابطه‌ی $\delta = \frac{PL}{EA}$ (تغییر طول)؛ بعداً اثبات می‌شود

سطح مقطع ← مساحت

(هر چه ماده قوی‌تر باشد تغییر طولش کمتر می‌شود)

شیب نمودار؟ (شیب نمودار) $\tan\theta = \frac{P}{\delta} = \boxed{\frac{EA}{L}}$

در حقیقت نقش K در فنر را بازی می‌کند

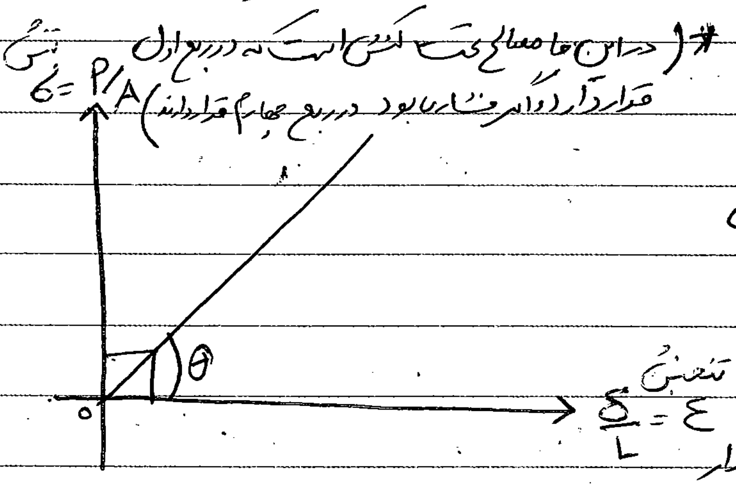
پس نمودار تنش ـ تغییر طول به عوامل زیر بستگی دارد: (در حقیقت شیب نمودار هم به عوامل زیر بستگی دارد)

۱ـ جنس مصالح (آلومینیوم ـ فولاد ...) ۲ـ مساحت مقطع ۳ـ طول عضو

* و هر وقت بخواهیم نمودار تنش ـ تغییر طول را معرفی کنیم برای یک شیء باید هر سه (یعنی جنس مصالح ـ مساحت مقطع و طول عضو را بدهیم) * = این نمودار زیاد در مقاومت کاربرد ندارد.

** ما در حقیقت نموداری را می‌خواهیم که فقط به جنس مصالح بستگی دارد یعنی ما نمودار تنش ـ تغییر شکل نسبی را می‌خواهیم **

*(در این‌جا مصالح تحت کشش است که در ربع اول قرار دارد و اگر فشاری بود در ربع چهارم قرار دارند)



(این نمودار فقط به جنس مصالح بستگی دارد و این نمودار برای ما مهم است)

اگر ما در این نمودار شیب را بدانیم این نمودار تعریف می‌شود پس برای ما $\tan\theta$ مهم است.

$$(1-1)\quad \tan\theta = \frac{\sigma}{\varepsilon} = E$$ (واحد E هم واحد σ است) چون ε واحد ندارد

(همان جنس مصالح که قبلاً مطرح شد) مدول الاستیسیته (ضریب ارتجاعی) (مدول یانگ)

نکته: σ و ε همواره در یک جهت هستند پس از این نتیجه می‌شود که E همواره مثبت است

ـ رابطه‌ی ۱-۱ معمولاً به صورت: $\boxed{\sigma = E \cdot \varepsilon}$ کاربرد بیشتری دارد که به قانون هوک معروف می‌باشد.

E در صورت مسئله داده می‌شود.

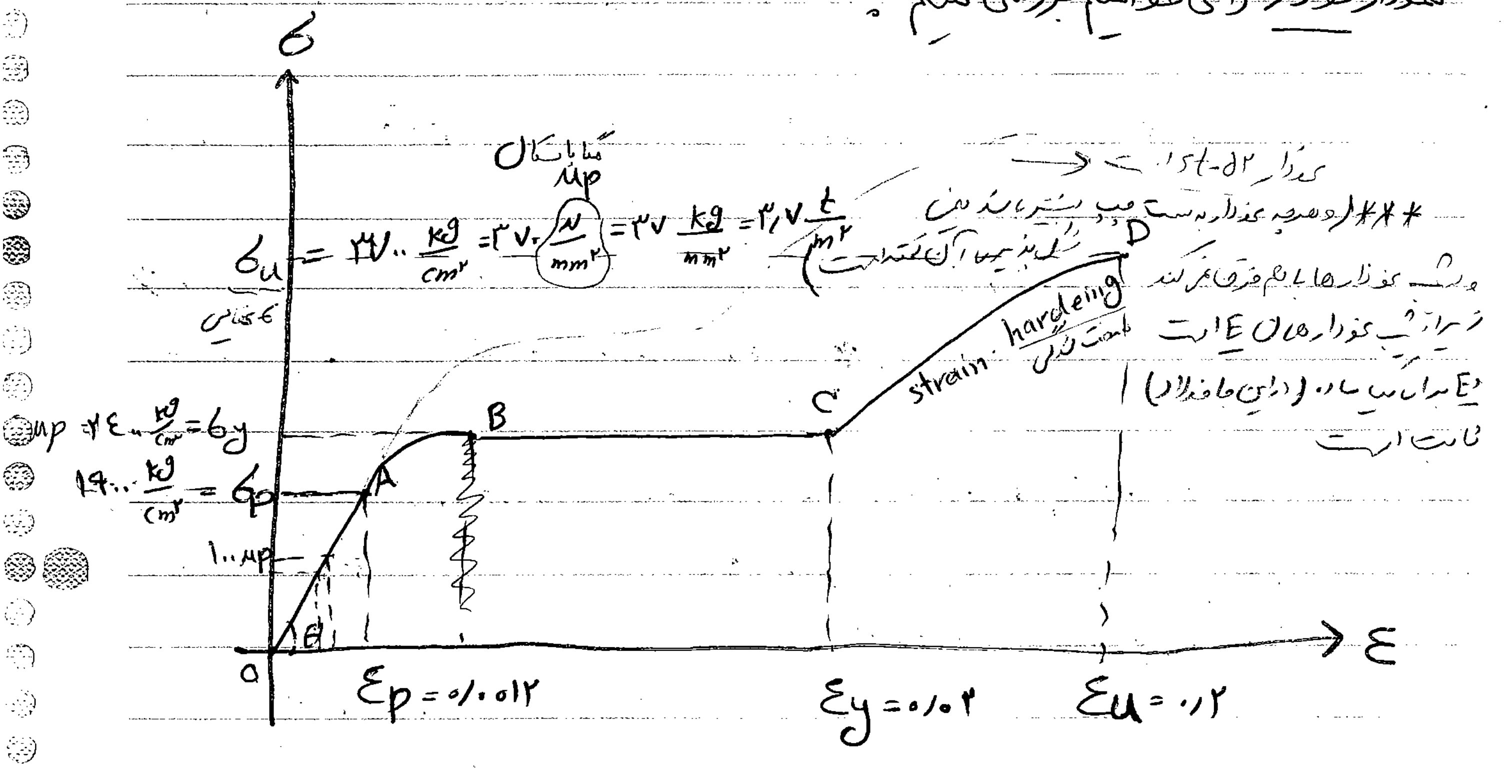
نکته: E مثل k در فنر برای هر ماده ثابت است مثلاً:

$E_{st} = 2.1 \times 10^6 \frac{kg}{cm^2} = 2.1 \times 10^5 \frac{N}{mm^2} =$ [illegible] $29 \times 10^6 \frac{Lb}{in^2}$ (فولاد، پوند)

$E_{al} = 0.7 \times 10^6 \frac{kg}{cm^2}$ (آلومینیوم)

$E_c = (0.26 \text{ تا } 0.35) \times 10^6 \frac{kg}{cm^2}$ (بتن)

نمودار فولاد را می‌خواهیم بررسی کنیم :



اگر یک میله فولادی تحت کشش باشد و ما بخواهیم
نمودار تنش - تغییر شکل آن را رسم کنیم طبق نمودار بالا می‌شود.

الاستیک مثل فنر = فنر اگر تحت تغییر شکل دارد آن را ول کنیم به حالت اولیه برمی‌گردد

با توجه به نمودار بالا :

(یعنی منطقه است (اسم در نمودار)

OA = منطقه الاستیک خطی

یعنی برگشت پذیر کاملاً ارتجاعی یا کشسان (قسمت از نمودار)
دبیرستانی

AB : منطقه الاستیک غیر خطی

BC : منطقه ٪ پلاستیک (عمدتاً افزایش کرنش صفر است
و الاستیک و ارتجاعی نیست)

CD : منطقه سخت شدگی مجدد تنش

و نقطه D، نقطه گسیختگی (پاره شدن) فولاد است.

$\frac{15}{100} \times 5$

SUBJECT :

Year (   ) Month (   ) Date (   )

- st به معنای فولاد است

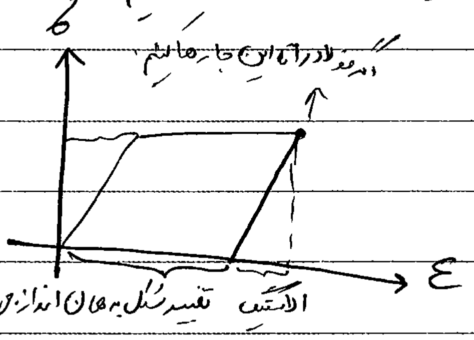
- مثلاً st37 یعنی فولادی که نقطه‌ی گسیختگی آن $37 \frac{kg}{mm^2}$ است

نکته در مورد نمودار تنش – کرنش:

- در عمل و در اجرا از منحنی AB (الاستیک غیرخطی) صرف‌نظر می‌کنند [اما در تئوری باید باشد]
- و در عمل ملاک ما $370\,Mp$ نیست بلکه $240\,Mp$ است. یعنی اگر تنش بیش از 240 باشد تغییر شکل خیلی زیاد می‌شود.

[برای شکل‌پذیری به ε و برای سختی به σ توجه می‌کنیم]

فرض می‌کنیم که فولاد تا 240 تحمل می‌کند و ضریب اطمینان را 240 قرار می‌دهیم.



(معمولاً نمودار فولاد را تا همین جا رسم می‌کنند)

اثبات $\delta = \frac{PL}{EA}$:

قانون هوک:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

$$\frac{P}{A} = E \cdot \frac{\delta}{L} \Rightarrow (I) \quad \boxed{\delta = \frac{PL}{EA}}$$

تغییر طول در اثر نیروی فشاری یا کششی

علامت δ به P بستگی دارد و طول و E و A همواره مثبت هستند.

الف) برای استفاده از فرمول (I) باید در تمام طول عضو (L) سه شرط زیر برقرار باشد:

1) عضو دو نیرویی باشد (P ثابت باشد)
2) همگن باشد (E ثابت باشد)
3) مقطع عضو یکنواخت باشد (A ثابت باشد)

در صورت برقراری این شروط از فرمول I استفاده می‌کنیم.

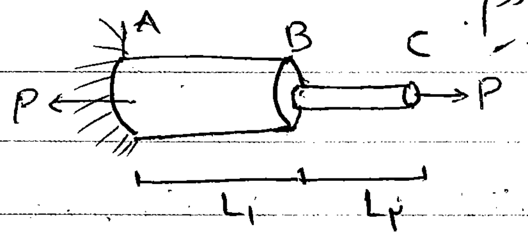
STAEDTLER

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

ب) اگر در طول عضو نیرو (P) یا جنس (E) یا مساحت مقطع (A) به طور ناگهانی یا غیر تدریجی تغییر نماید، عضو را به چند قسمت جزئی تقسیم می‌کنیم که هر قسمت آن به طور مجزا ۳ شرط صفحه قبل را دارا باشد و از فرمول زیر تغییر طول کل عضو را بدست می‌آوریم:

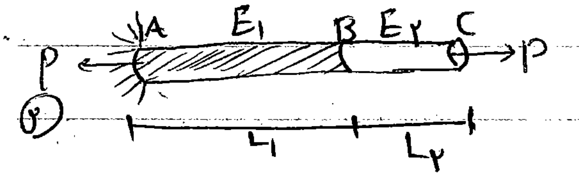
①



A ثابت است

$$\boxed{\delta=\sum_{i=1}^{n}\delta_i=\sum_{i=1}^{n}\frac{P_i L_i}{E_i A_i}} \quad (II)$$

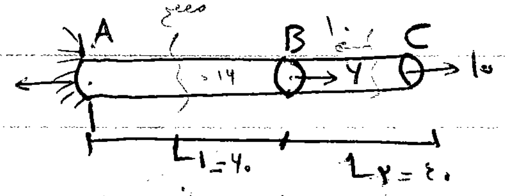
②



E ثابت نیست

P + ۶ − ۱۶ = ۰

③



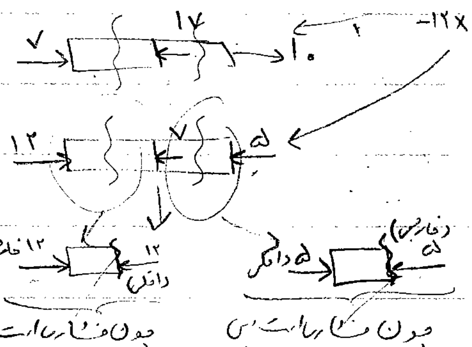
P ثابت نیست

$$\delta=\frac{1}{EA}\left(P_1L_1+P_2L_2\right)$$

۱۰۷×۶۰ ۱۰×۴۰

−۷×۶۰ ۱۰×۴۰

−۱۲×۶۰ −۵×۴۰



برای شکل ①:

از آنجایی که ثابت است را بیرون

$$\delta=\frac{P}{E}\left(\frac{L_1}{A_1}+\frac{L_2}{A_2}\right)$$

برای شکل ②:

$$\delta=\frac{P}{A}\left(\frac{L_1}{E_1}+\frac{L_2}{E_2}\right)$$

برای شکل ③:

$$\delta=\frac{1}{EA}\left(P_1L_1+P_2L_2\right)$$

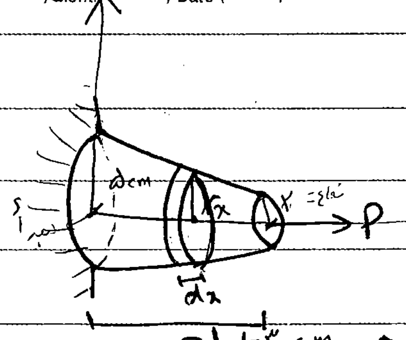
ج) اما اگر نیرو (P) و جنس (E) و یا مساحت (A) در طول عضو به طور تدریجی تغییر نماید از فرمول انتگرالی زیر استفاده می‌کنیم:

$$\boxed{\delta=\int_0^L\frac{P_x\,dx}{E_xA_x}} \quad (III)$$

تابعی برحسب x

تابعی برحسب x

SUBJECT : (۲ درشناعی)
Year ( ) Month ( ) Date ( )



مخروط ناقص
مساحت آن به طور تدریجی تغییر کرده

تغییر طول این المان می شود:

$$\delta = \frac{P\,dx}{E \cdot A}$$

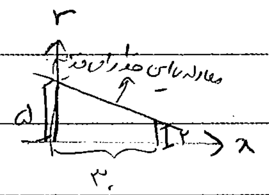
اما برای کل شکل باید از این المان انتگرال گرفت که می شود تغییر طول کل.

$$\boxed{\delta = \frac{P}{E}\int_0^L \frac{dx}{A_x}} \longrightarrow \frac{P}{E}\int_0^{30} \frac{dx}{\pi r_x^2}$$

$$r = ax + b$$

$$\begin{cases} x = 0 \rightarrow r = ? \\ x = L \rightarrow r = ? \end{cases}$$

مثلاً در شکل زیر:



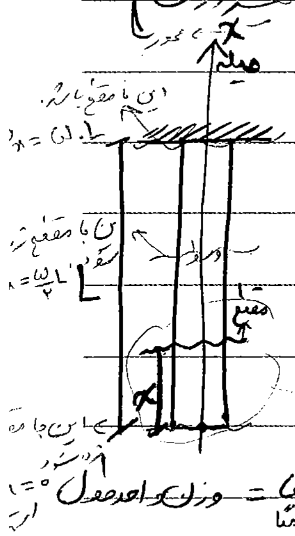
$$r = ax + b$$

$$r_x = 5 - 0.1x$$

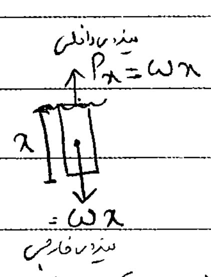
$$\begin{cases} x = 0 \rightarrow r = 5 \\ x = 30 \rightarrow r = 2 \end{cases}$$

$$\delta = \frac{P}{E}\underbrace{\int_0^{30} \frac{dx}{\pi(5 - 0.1x)^2}}_{\text{برای وقتی که مساحت تدریجی تغییر کند}}$$

مثال برای این که P تدریجی تغییر کند و مثال کاربرد دارد [مثال تغییر طول در اثر تغییر وزن]



A ثابت است
E ثابت است
P متغیر است



ω = وزن واحد طول

وزن کل میله = $W = \omega \cdot L$

نکته: نیروی داخلی در جایی که مقطع زده می شود وارد می شود.

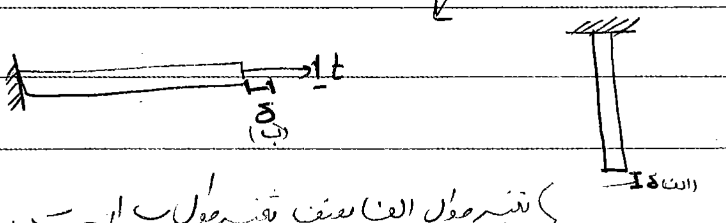
$$\delta = \frac{1}{EA}\int_0^L P_x\,dx = \frac{1}{EA}\int_0^L \omega \cdot x\,dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \delta = \frac{\omega}{EA}\left[\frac{x^2}{2}\Big|_0^L\right] = \frac{\overbrace{\omega L}^{W = \omega \cdot L}{}^2}{2E \cdot A} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta = \frac{W \cdot L}{2EA}}$$

این فرمول ½ برابر فرمول اصلی است.

$\delta = ?$

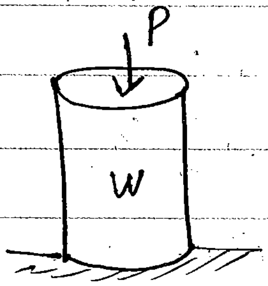


تغییر طول الف نصف تغییر طول ب است.

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

نتیجه مهم: تغییر طول ناشی از وزن نصف تغییر طول ناشی از کشیدن است
کنکوری

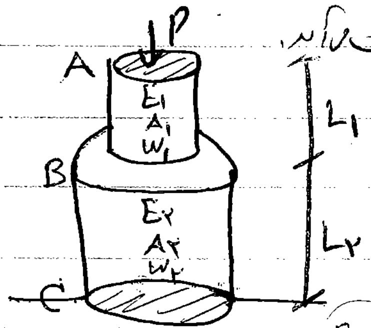


مثال: ستون است که کاهش طول ناشی از:

الف) مقدار کاهش طول $\frac{WL}{2EA} + \frac{PL}{EA}$ ج) $+ \dots$

ب) $\dots + \dots$ د) $\dots$ ✓ (تغییر طول خواست / گزینه‌ها [illegible])

تست: مقدار کاهش ارتفاع کل ستون ؟؟



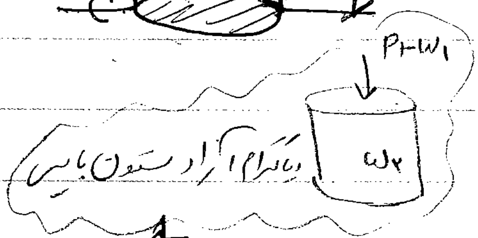
تغییر ارتفاع کل ستون یعنی تغییر ارتفاع AC که از جمع AB + BC بدست می‌آید

$\delta_1+\delta_2$

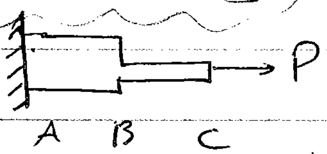
ستون بالایی

$$\delta_{AC}=\delta_{AB}+\delta_{BC}=\left[\frac{PL_1}{E_1A_1}+\frac{W_1L_1}{2E_1A_1}\right]+\left[\frac{(P+W_1)L_2}{E_2A_2}+\frac{W_2L_2}{2E_2A_2}\right]$$

باید فرمول مسئله قبل هم استفاده کنیم [illegible]
آنرا [illegible] چون



تست:



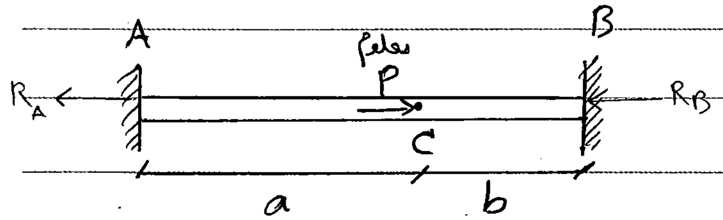
تغییر مکان (جابه‌جایی) نقطه C = ؟؟

δ_C (تغییر مکان (جابه‌جایی) نقطه C) $=\delta_{AC}$

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

حل مسائل نامعین استاتیکی :



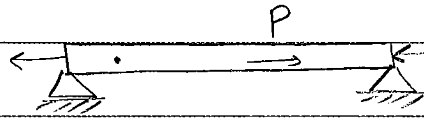
اگر نیروی P عمودی بود هر تکیه‌گاه ۳ عکس العمل داشت، ولی چون نیرو افقی است هر تکیه‌گاه یک عکس العمل دارد

معادله‌ی تعادل : $\sum F_x = 0$ $\boxed{R_A + R_B = \overset{\text{معلوم}}{P}}$ (1)

معادله‌ی سازگاری : تغییر شکل‌ها (تغییر طول‌ها) (در مقاومت)

$\delta_{AB} = 0 \Longrightarrow$

یا



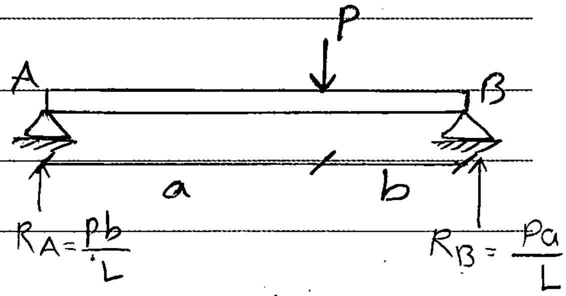
$\delta_{AC} + \delta_{BC} = 0$

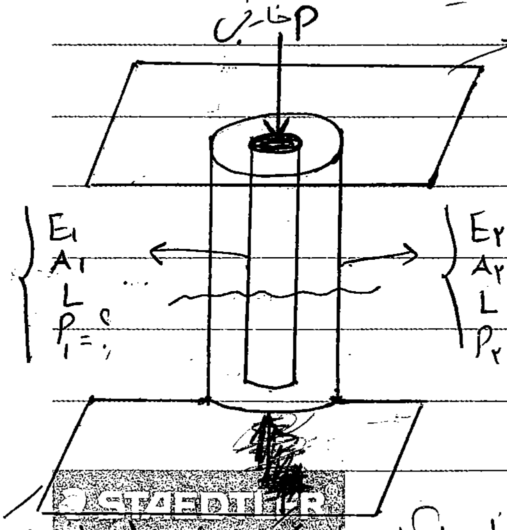
$$\boxed{\delta = \frac{PL}{EA}} \qquad \boxed{\frac{\overset{\text{کششی}}{R_A \cdot a}}{E \cdot A} + \frac{\overset{\text{فشاری}}{-R_B \cdot b}}{EA} = 0} \quad (2)$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} R_A = P\dfrac{b}{L} \\ R_B = P\dfrac{a}{L} \end{cases}$$

** در استاتیک معین در تقسیم می‌کردیم و این جوری حل می‌کردیم که

با حل در مقاومت نامعین در تقسیم دستم برابر بود **





مثال: نیروی میله و لوله را بدست آورید.

الف) $\sum F_y = 0$

معادله‌ی تعادل : $\boxed{P_1 + P_2 = P \text{ معلوم}}$ (1)

معادله‌ی سازگاری تغییر طول‌ها : $\delta_1 = \delta_2$

تغییر طول در لوله و میله یکسان است به خاطر وجود صفحه‌ی صلب

$$\boxed{\frac{P_1 L}{E_1 A_1} = \frac{P_2 L}{E_2 A_2}}$$

یک میله‌ی فولادی داخل میله‌ای لوله می‌شود بین صفحه‌ی صلب زیر و صفحه‌ی صلب روی آن قرار دارد با بار گسترده P به ترتیب آن نشان داده شده است.

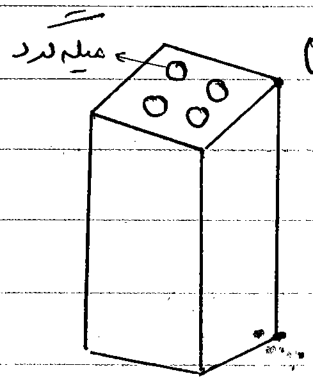
SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

$$\begin{cases} P_1 = P \dfrac{E_1A_1}{E_1A_1+E_2A_2} \\[2ex] P_2 = P \dfrac{E_2A_2}{E_1A_1+E_2A_2} \end{cases}$$

می‌توانیم از فرمول بالا استفاده کنیم؟

(بتن آرمه)



$$\begin{cases} P_1 = P \dfrac{E_1A_1}{E_1A_1+E_2A_2} \\[2ex] P_2 = P \dfrac{E_2A_2}{E_1A_1+E_2A_2} \end{cases} \Longrightarrow$$

در ستون شکل مقابل سهم بتن نسبت به فولاد؟ $\dfrac{P_1}{P_2} = ?$

$$\Rightarrow \frac{P_1}{P_2} = \frac{E_1A_1}{E_2A_2}$$

(به نسبت صلبیت محوری)

ب) تنش در هر کدام را بدست آورید؟

$$\begin{cases} \sigma_1 = \dfrac{P_1}{A_1} = P\dfrac{E_1}{\Sigma EA} \\[2ex] \sigma_2 = \dfrac{P_2}{A_2} = P\dfrac{E_2}{\Sigma EA} \end{cases} \quad \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{E_1}{E_2}$$

به نسبت مدول الاستیسیته

ج)

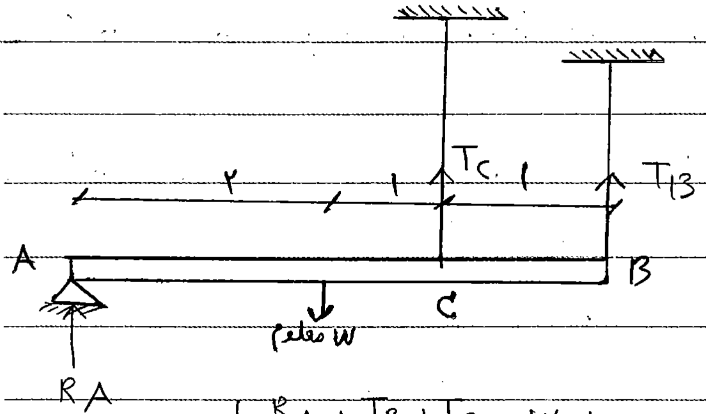
$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \dfrac{\sigma_1}{E_1} = \dfrac{P}{\Sigma EA} \\[2ex] \varepsilon_2 = \dfrac{\sigma_2}{E_2} = \dfrac{P}{\Sigma EA} \end{cases} \qquad \boxed{\sigma = E\varepsilon}$$

د)

$$\begin{cases} \delta_1 = \varepsilon_1 L = \boxed{\dfrac{PL}{\Sigma EA}} \\[2ex] \delta_2 = \varepsilon_2 L = \dfrac{PL}{\Sigma EA} \end{cases}$$

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

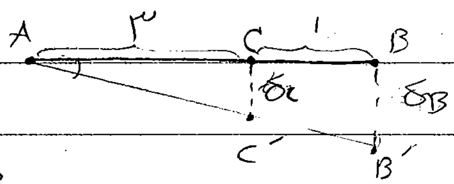


با وجود نیروی W میله حول نقطه A که ثابت است می‌چرخد و در کابل‌ها تغییر طول ایجاد می‌شود.

معادلات تعادل:

$R_A + T_B + T_C = W_{\text{معلوم}}$

گشتاور حول A: $4T_B + 3T_C = 2W$

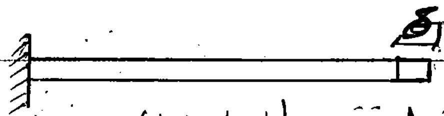


معادلات سازگاری تغییر طول‌ها:

$$\frac{\delta_C}{\delta_B} = \frac{3}{4} \to \delta_C = \frac{3}{4}\delta_B$$

$$\frac{T_C \cdot L_C}{E_C \cdot A_C} = \frac{3}{4}\,\frac{T_B \cdot L_B}{E_B \cdot A_B}$$

اثرات تغییر دما: (در اثر دما تغییر طول می‌بینیم)

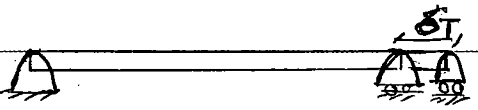


(تغییر طول حرارتی)

تغییر طول ناشی از تغییر دما (حرارت)

$$\boxed{\delta_T = \alpha \cdot L \cdot \Delta T}$$

δ_T (mm) — α ($\frac{1}{°C}$) ضریب انبساط طولی حرارتی — L (mm) طول — ΔT (°C) $(T_2 - T_1)$ تغییر دما



به مساحت بستگی ندارد

$$\boxed{\delta = \frac{PL}{EA}}$$

تغییر طول در اثر کشش است.

کرنش حرارتی:

$$\boxed{\varepsilon_T = \frac{\delta_T}{L} = \alpha \cdot \Delta T}$$

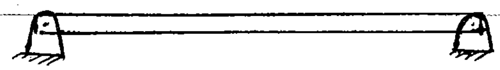
میله‌ای را گرم کنیم و افزایش طول دهد یا سرد کنیم و کاهش طول دهد تنش صفر است. تنش $\sigma_T = 0$

STAEDTLER

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

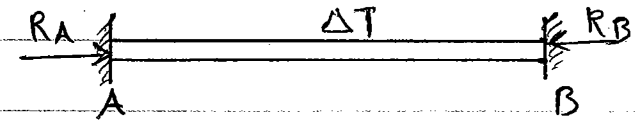
- اگر تغییر دما بر میله هایی که می توانند تغییر طول داشته باشند یعنی سر میله ها آزاد است.
- اگر تغییر دما بر میله هایی که نمی توانند تغییر طول داشته باشند؟



δ تغییر طول $= 0$

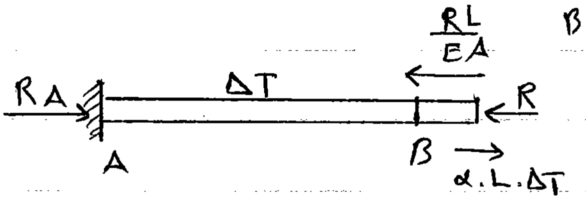
$\varepsilon = 0$

σ تنش $= ?$



معادله تعادل : $\Sigma F_x = 0 \Longrightarrow R_A = R_B = R$

فرض: اگر تکیه گاه B نبوده



معادله سازگاری تغییر طول ها : $\delta_{AB} = 0$

$$(\alpha . L . \Delta T) + \left(\frac{RL}{EA}\right) = 0$$

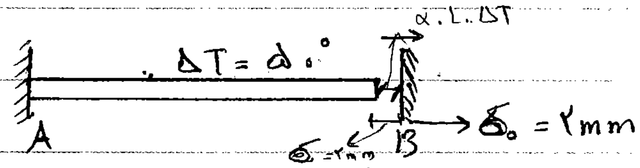
عکس العمل $\boxed{R = -EA . \alpha . \Delta T}$

اگر سرد کنیم $+R \leftarrow -\Delta T$

اگر گرم کنیم $-R \leftarrow +\Delta T$

$$\sigma_{\text{تنش}} = \frac{R}{A} = -E . \alpha . \Delta T$$

مثال: σ تنش $= ?$



δ_T تغییر طول $= \underbrace{\alpha . L . \Delta T}_{5}$

$$\begin{cases} 5 \le \underbrace{\delta_0}_{2} & \text{نمی‌خورد به تکیه‌گاه B} \\ 5 > \underbrace{\delta_0}_{2} & \text{می‌خورد به تکیه‌گاه B} \end{cases}$$

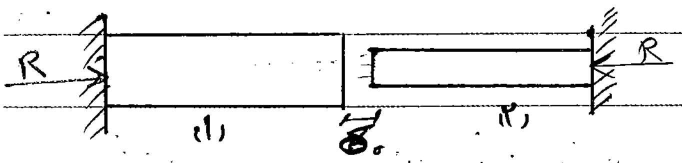
معادله سازگاری : $\delta_{AB} = 2mm$

$$\underbrace{\alpha . L \Delta T}_{5} + \frac{R . L}{\underbrace{E . A}_{-3}} = 2 \longrightarrow \boxed{R = 2}$$

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

مثال: $R = ?$



معادله سازگاری: $\delta_1 + \delta_2 = \underset{\text{معلوم}}{\delta_0}$

$$\left(\alpha_1 \cdot L_1 \cdot \Delta T + \frac{R \cdot L_1}{E_1 \cdot A_1}\right) + \left(\alpha_2 \cdot L_2 \cdot \Delta T + \frac{R L_2}{E_2 A_2}\right) = \delta_0$$

اگر دو میله ی بالا به هم چسبیده بود و تنش را می خواست: $\delta_0 = 0$ می ذاریم در معادله بالا

نسبت پواسون (ضریب پواسون): ν ص ۵۲ کتاب

فرض: یک میله ی فولادی را در آزمایشگاه تحت کشش قرار می دهیم می بینیم طول آن 1mm

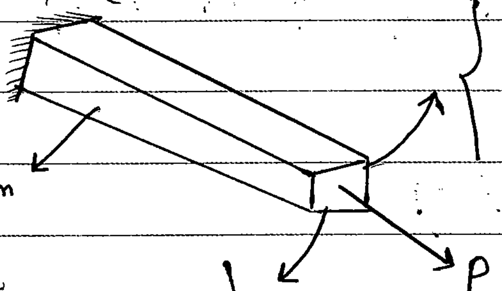
$\sigma_x = \frac{P}{A}$

اضافه شده اما تغییر طول در راستای Z و y کم تر می شود

$\sigma_y = \sigma_z = 0$ اما $\varepsilon_y = \varepsilon_z \neq 0$

$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu \varepsilon_x$

$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$ ← مدول کشسانی



$L_z = 20\,mm$

$\delta_z = -0.006\,mm$

$\varepsilon_z = -0.0003\,mm$

$L_x = 1000\,mm$

$\delta_x = 1\,mm$

$\varepsilon_x = 0.001 \quad \frac{\delta}{L}$

$L_y = 20\,mm$

$\delta_y = -0.006\,mm$

$\varepsilon_y = -0.0003$

$\varepsilon_x = \frac{\delta_x}{L_x}$

$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$

(برای مواد ایزوتروپ)

$$\underset{\text{(نسبت پواسون)}}{\overset{\text{نو}}{\nu}} = \frac{\text{تغییر طول نسبی جانبی}}{\text{تغییر طول نسبی محوری}} = \frac{-\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = \frac{-\varepsilon_z}{\varepsilon_x} \text{ یا } \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\underbrace{\varepsilon_y = \varepsilon_z}_{\text{کرنش های جانبی}} = -\nu \underbrace{\varepsilon_x}_{\text{کرنش محوری}}} \qquad \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{\underset{\text{مدول الاستیسیته}}{E}} \qquad \sigma_x = \frac{P}{A}$$

همگن: خواص ماده در تمام نقاط ماده یکسان و ثابت باشند. (خواص عددی) با اسکالر

SUBJECT :

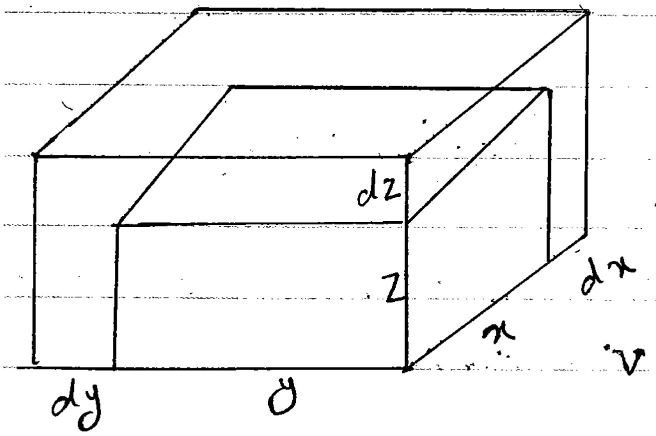
Year ( ) Month ( ) Date ( )

ایزوتوپیا : ماده‌ای ایزوتروپ است که کلیه‌ی خواص آن در تمام جهات یکسان باشد

مثال : مثلاً اگر یک مکعب فولادی را در آب جوش بیندازیم به همان شکل مکعب می‌ماند چون تغییر طول در تمام بعدها یکسان است

$v' - v$ تغییر حجم

تغییر حجم نسبی : $\left(\underbrace{\varepsilon_v}_{\text{تغییر حجم نسبی}} = \frac{\delta_v}{v}\right)$



$$V = x.y.z$$

حجم ثانویه $v' = [(x+dx)(y+dy)](z+dz)$

$$[xy + xdy + ydx](z+dz)$$

$$v' = xyz + yzdx + xzdy + xydz$$

$$\varepsilon_v = \frac{yzdx + xzdy + xydz}{xyz}$$

$$\boxed{\varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}$$ فرمول کلی (I)

** اگر حجمی به هر دلیلی تغییر کرد [نیرو یا گرما] ، تغییر حجم نسبی برابر است با مجموع سه تغییر طول نسبی **

کاربرد فرمول : الف) تغییر حجم نسبی ناشی از تغییر دما ؛

ب) تغییر حجم نسبی ناشی از نیروی محوری ؛ (تغییر نیرو)

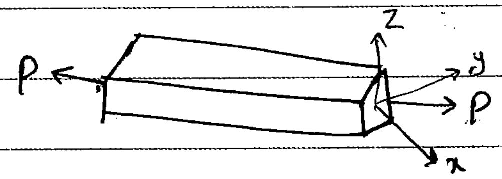
SUBJECT :
Year (   ) Month (   ) Date (   )

الف) تغییر حجم نسبی ناشی از تغییر دما:

$$\varepsilon_v = \underbrace{\varepsilon_x}_{\alpha\Delta T} + \underbrace{\varepsilon_y}_{\alpha\Delta T} + \underbrace{\varepsilon_z}_{\alpha\Delta T} \Rightarrow \boxed{\varepsilon_v = 3\alpha \cdot \Delta T} \quad (II)$$

ضریب انبساط حجمی حرارتی

ب) تغییر حجم نسبی ناشی از نیروی محوری:



$$\varepsilon_v = \varepsilon_x + \underbrace{\varepsilon_y}_{-\nu\varepsilon_x} + \underbrace{\varepsilon_z}_{-\nu\varepsilon_x} \Rightarrow$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu\varepsilon_x$$

$$\Rightarrow \boxed{\varepsilon_v = \varepsilon_x(1-2\nu)} \quad (III)$$

اگر $\nu = 0 \Rightarrow \varepsilon_v = \varepsilon_x$

اگر $\nu = 0.5 \Rightarrow \varepsilon_v = 0$

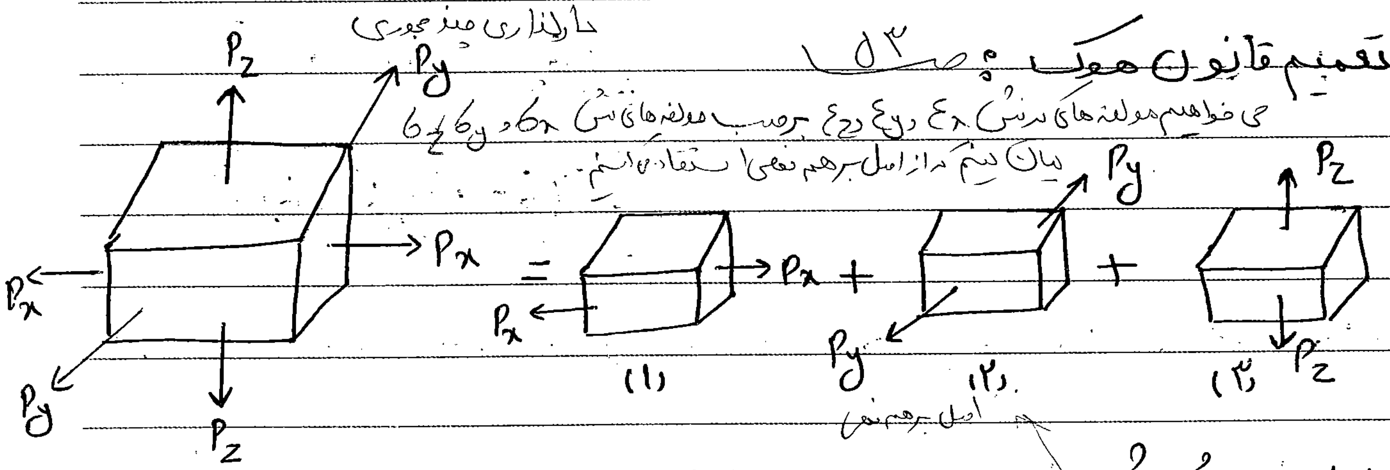
$\Rightarrow \boxed{0 < \nu < 0.5}$

نتیجه: ν بین ۰ تا ۰٫۵ است ν برابر صفر وجود ندارد اگر $\nu = 0.5$ باشد امکان ندارد.

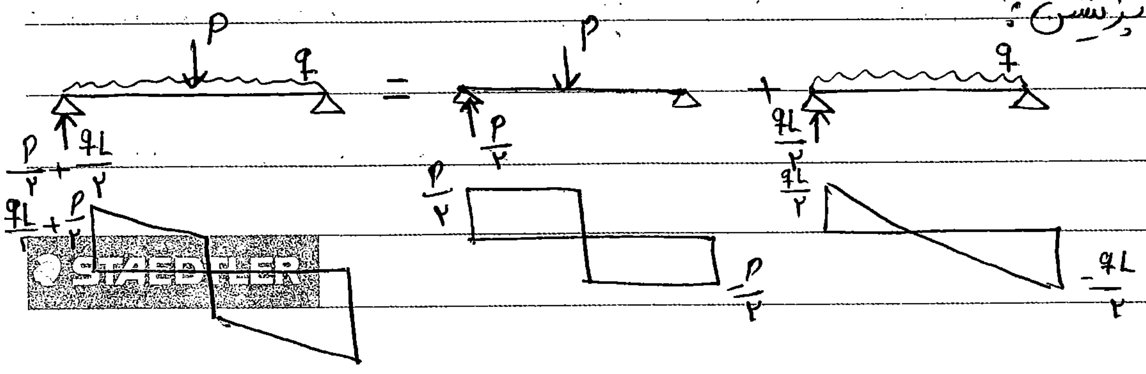
بارگذاری چند محوری

تعمیم قانون هوک: ص ۵۳

می خواهیم مولفه‌های کرنش ε_x و ε_y و ε_z برحسب مولفه‌های تنش σ_x و σ_y و σ_z بیان کنیم، از اصل برهم نهی استفاده می‌کنیم.



اصل سوپر پوزیشن:

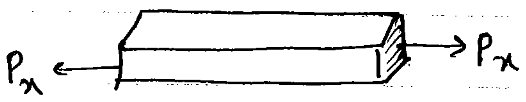


SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

هوک : $\sigma_x = E\varepsilon_x$

پواسون : $\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu\varepsilon_x$



$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \qquad \varepsilon_y = -\nu\frac{\sigma_x}{E}$$

تحت کشش

$$\varepsilon_z = -\nu\frac{\sigma_x}{E}$$

$$\begin{cases} \varepsilon_x = +\dfrac{\sigma_x}{E} & -\nu\dfrac{\sigma_y}{E} & -\nu\dfrac{\sigma_z}{E} \\ \varepsilon_y = -\nu\dfrac{\sigma_x}{E} & +\dfrac{\sigma_y}{E} & -\nu\dfrac{\sigma_z}{E} \\ \varepsilon_z = -\nu\dfrac{\sigma_x}{E} & -\nu\dfrac{\sigma_y}{E} & +\dfrac{\sigma_z}{E} \end{cases}$$

بارگذاری در امتداد x (۱) — بارگذاری در امتداد y (۲) — بارگذاری در امتداد z (۳)

اگر از دو یا ۳ جهت نیرو وارد شود، (کلا اگر از تمام وجه ها تحت کشش باشد)

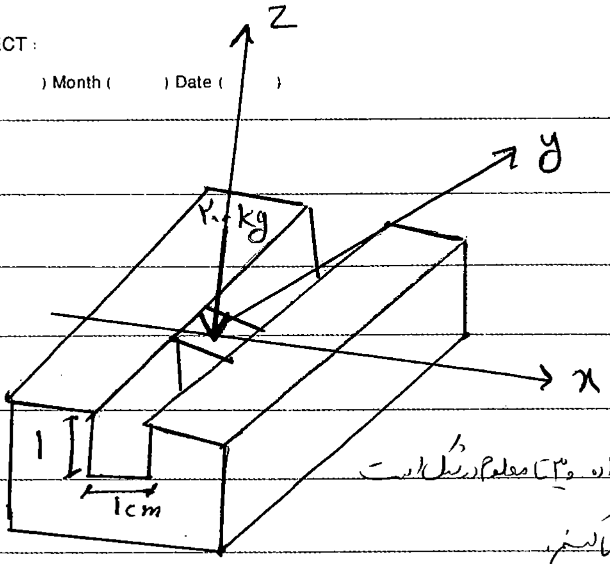
$$\begin{cases} \varepsilon_x = +\dfrac{\sigma_x}{E} - \nu\dfrac{\sigma_y}{E} - \nu\dfrac{\sigma_z}{E} = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)\right] + \alpha\Delta T \\ \varepsilon_y = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)\right] + \alpha\Delta T \\ \varepsilon_z = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\right] + \alpha\Delta T \end{cases}$$

اگر علاوه بر اعمال نیرو در هر سه جهت دما را نیز تغییر دهیم

مثال: قطعه‌ی صلب فولادی یک شیار به عمق و عرض 1cm و یک قطعه‌ی (مکعب) لاستیکی به ابعاد 1cm در داخل شیار کاملاً فیت شده است و یک فشار ۲۰۰kg به لاستیک اعمال شده. تنش لاستیک را تحت فشار قرار داده و E و ν لاستیک معلوم می‌باشد.

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )



$\cancel{\varepsilon_x}$ ε_y ε_z

فشاری

σ_x $\cancel{\sigma_y}$ $\sigma_z \rightarrow -200\ \frac{kg}{cm^2}$

نیروی وارد بر همه محور تنش آن وجه محسوب می‌شود.

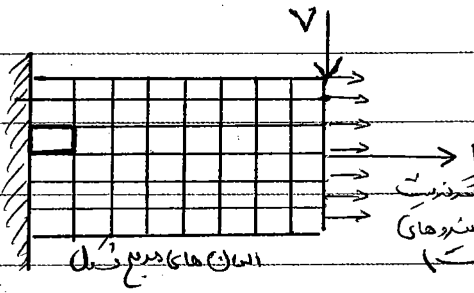
۳ تا مجهول داریم ۲ تا معلوم را مسئله داده و ۳ تا معلوم در شکل است

حال در ۳ معادله بالا قرار داده و حل می‌کنیم

ε_x صفر است چون دقیقاً داخل شیار است و ε نداریم، σ_y نداریم چون ε_y آن آزاد است و هیچ نیرویی به آن وارد نمی‌شود.

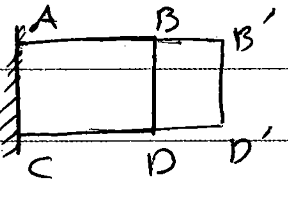
مگر $\varepsilon_x = \varepsilon_y = -\nu \frac{\sigma_z}{E}$ ؟؟ پس پواسون اینجا $\varepsilon_x \neq \varepsilon$ است.

قانون هوک برای تنش‌ها و تنجش‌های (کرنش‌های) برشی :

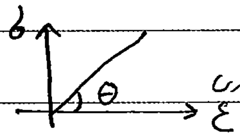


تحت کشش قرار می‌دهیم

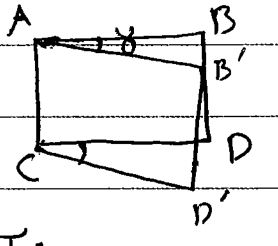
در اثر کشش مربع به مستطیل می‌شود
در اثر برش مربع به متوازی‌الاضلاع می‌شود



تنجش محوری $\varepsilon = \frac{BB'}{AB}$

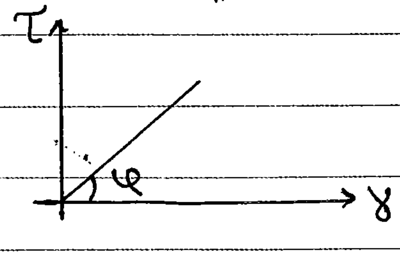


$\tan\theta = E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$ — تنش محوری / تنجش محوری — مدول الاستیسیته محوری



$\tan\gamma = \gamma = \frac{BB'}{AB}$

تنجش برشی



$\tan\varphi = G = \frac{\tau}{\gamma}$ — تنش برشی / تنجش برشی

مدل الاستیسیته برشی

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

تنش محوری $\sigma = E \cdot \varepsilon$ تنجش محوری

مدول الاستیسیته

تنش برشی $\tau = G \cdot \gamma$ تنجش برشی

مدول برشی — زاویه یا برش هم هست

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

اگر دو تا را داشته باشیم سومی بدست می‌آید.

مثال! $G = \frac{E}{2(1+\nu)} \Rightarrow \frac{E}{G} = 2(1+\underset{0.5}{\overset{0}{\nu}}) \Rightarrow$

$\Rightarrow 2 < \frac{E}{G} < 3$

الف) $1 < \frac{E}{G} < 2$

ب) $2 < \frac{E}{G} < 3$ ✓

ج) $3 < \frac{E}{G} < 4$

SUBJECT :

Year (   ) Month (   ) Date (   )

فصل سوم : پیچش :

پیچش مقاطع مدور :

در استاتیک ما P (نیروی محوری)، V (نیروی برشی)، T (گشتاور پیچشی) و M (گشتاور خمشی) را بدست می‌آوردیم.

در مقاومت می‌خواهیم ببینیم که P، V، T و M چه نتیجه‌ای می‌دهند (چه تنشی می‌دهند)

نیروی محوری P $\Rightarrow \sigma_{Ave} = \dfrac{P}{A}$ تنش محوری نتیجه می‌دهد و برای تغییر شکل $\Rightarrow \delta = \dfrac{PL}{E \cdot A}$ (تغییر طول)

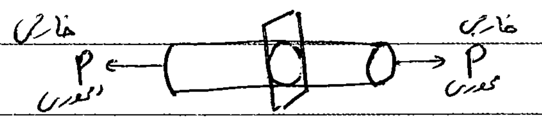
نیروی برشی V $\Rightarrow \tau_{Ave} = \dfrac{V}{A}$ تنش برشی نتیجه می‌دهد.

گشتاور پیچشی T $\Rightarrow \tau = ?$ و برای تغییر شکل $\Rightarrow \phi = ?$ (تغییر زاویه)

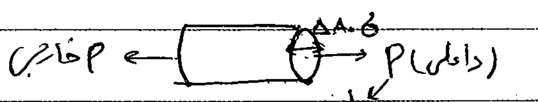
ما اگر میله را بپیچانیم تا زمانی که از حالت خارج شود بریده شود و بنابراین تنش برشی ایجاد می‌کند

گشتاور خمشی M $\Rightarrow \sigma = ?$ در فصل چهارم خوانده می‌شود

ما تیرها را هم داریم



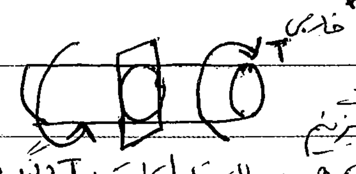
این میله در حال تعادل است پس هر مقطعی از آن هم باید تعادل داشته باشد.



این نیرو ناشی از سطح است.

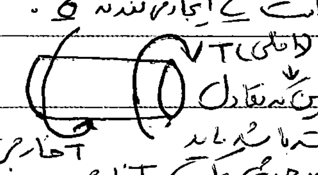
$$P = \int \sigma \cdot dA$$

فرض: میله‌ی مدور داریم که تحت پیچش است (نه کشش و فشار)

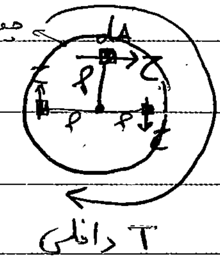


اگر مقطع بزنیم مقطع آن هم در حال تعادل است. T گشتاور پیچشی خارجی

چون مماس بر سطح است τ ایجاد کننده σ.



برای این که تعادل داشته باشد باید گشتاور پیچشی عکس T خارجی به وجود آید که گشتاور داخلی ناشی از تنش است اما گشتاور خارجی این‌طور نیست.



تنش در تعادل و متقارن بر ρ عمود است

$$\tau dA \cdot \rho = T \Rightarrow$$

نیرو، فاصله، گشتاور

$P = \int \sigma dA \Leftarrow$ نیروی کل

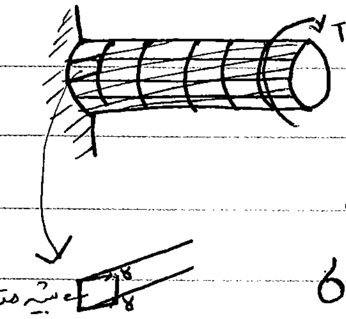
$P = \sigma \cdot A$

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

$\boxed{T=\int_A \rho\tau\, dA}$ گشتاوری که به مقطع وارد می‌شود (این فرمول کاربردی نیست)

فرض: اگر این میله تحت گشتاور T قرار گیرد خطوط افقی مورب می‌شوند و خطوط عمود بر افق دور محورش دوران دارند و شکل آن تغییر می‌کند:



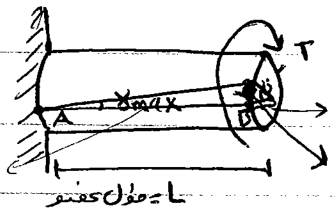
مستطیل متوازی الاضلاع شده پس برشی است.

نتیجه: طول تغییر می‌کند (پس تنش برشی است) و زاویه ایجاد می‌شود.

$\sigma = E\cdot\varepsilon$ هر تغییر طول ناشی از کشش و فشار است

$\tau = G\gamma$ ما تغییر زاویه ناشی از پیچش است

* فرض:



γای که روی میله است همان γ_{max} است

هرچه داخل‌تر برود γ کوچکتر می‌شود.

وقتی میله تحت گشتاور پیچشی T قرار می‌گیرد نقطه‌ی B تبدیل به B' می‌شود و زاویه‌ی γ ایجاد می‌شود که بی‌نهایت کوچک است. r (شعاع)

φ = زاویه‌ی پیچشی (همان ϕ است در فصل قبلی)

می‌خواهیم رابطه‌ای بین γ و φ بنویسیم (هرچه γ بیشتر شود φ هم بیشتر می‌شود)

* برای این که بین γ و φ رابطه داشته باشیم باید فصل مشترک آن‌ها که قوس BB' است را در نظر بگیریم.

$$\begin{cases} \overset{\text{کمان}}{BB'} = r\varphi \\ BB' = L\gamma_{max} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\gamma_{max} = r\frac{\varphi}{L}}$$

اگر γ بی‌نهایت کوچک باشد کمان BB' مانند خط است.

اگر یک استوانه پیچشی به شعاع ρ جدا شود

پس اگر میله‌ای فرضی در داخل میله‌ی اصلی بگیریم φ تغییر نمی‌کند اما γ تغییر می‌کند. پس γای که روی میله اتفاق می‌افتد γ_{max} است ولی γای که داخل‌تر اتفاق می‌افتد γ است.

$\gamma_{max} = r\frac{\phi}{L}$ شعاع میله‌ی اصلی

$\gamma = \rho\frac{\phi}{L}$ شعاع میله‌ی داخلی

بعد

درشته :

(۱) $$\boxed{T=\int_A \rho\,\tau\, dA}$$

(۲) $$\boxed{\gamma=\rho\frac{\phi}{L}}$$

که به صورت خطی برحسب ρ تغییر می‌کند.

(۳) $$\boxed{\gamma_{max}=r\frac{\phi}{L}}$$

(۴) $$\boxed{\gamma=\frac{\rho}{r}\gamma_{max}}$$

با توجه به قانون هوک $\tau=G\gamma$ اگر طرفین رابطه ۲ را در G ضرب کنیم تنش برشی ایجاد شود.

$$\tau=G\gamma=G\rho\frac{\phi}{L}$$

اگر طرفین رابطه ۳ را در G ضرب کنیم تنش برشی max ایجاد شود.

$$\tau_{max}=G\gamma_{max}=Gr\frac{\phi}{L}$$

پس τ_{max} در دورترین نقاط از مرکز ایجاد شود.

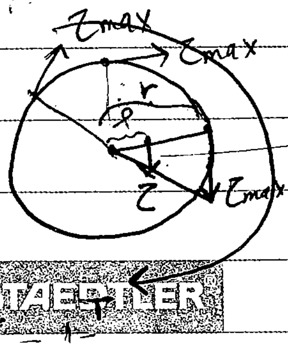
* بیشترین تنش در دورترین نقاط از مرکز ایجاد می‌شود *

$$\frac{\tau}{\tau_{max}}=\frac{\rho}{r}\Rightarrow \boxed{\tau=\frac{\rho}{r}\cdot\tau_{max}} \quad (۵)$$

اگر طرفین رابطه (۴) را در G ضرب کنیم

$$G\gamma=\frac{\rho}{r}G\gamma_{max}\Rightarrow \boxed{\tau=\frac{\rho}{r}\tau_{max}} \quad (۶)$$ کاربردی

مهم.



با توجه به شکل مهم به رابطه بین τ و τ_{max} و r و ρ خطی است. یعنی:

$$\frac{\tau}{\tau_{max}}=\frac{\rho}{r}$$

معکوس ساعتگرد قرار گرفته.

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

نتیجه‌ی مهم: تنش خطی تغییر می‌کند و به فاصله بستگی دارد [دورترین فاصله از مرکز بیشترین تنش]

طبق رابطه‌ی ۵ بود ما: ۵ را داخل ۱ می‌گذاریم.

$$①,⑤ \Rightarrow T=\int_A \rho\left(\frac{\rho}{r}\tau_{max}\right)dA \Rightarrow$$

حل انتگرال در صفحه‌ی الف

$$T=\frac{\tau_{max}}{r}\underbrace{\int_A \rho^2 dA}_{J} \Rightarrow \boxed{T=\frac{\tau_{max}\cdot J}{r}}\ (۷) \Rightarrow \boxed{T_{\text{مجاز}}=\frac{\tau_{\text{مجاز}}\cdot J}{r}}$$

ممان اینرسی — ظرفیت باربری — حداکثر

مهم‌ترین فرمول

$$\boxed{\tau_{max}=\frac{Tr}{J}}\ (۷)$$

کنترل — فرمول کنترل — کنترل لنگر موجود — خیلی مهم کاربردی — فضای پیچشی

$$\boxed{\tau=\frac{T\rho}{J}}\ (۸)$$

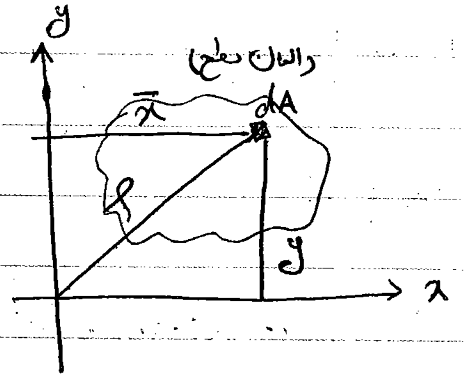
خیلی مهم کاربردی

شعاع داخلی (فاصله‌ی مرکز از نقطه‌ای که می‌خواهیم تنش را در آن به دست آوریم)

* بار یعنی نیرو یا لنگر خارجی وارد بر سازه
پس ظرفیت باربری در مقطع قبل یعنی یک مقطع چقدر نیرو را تحمل می‌کند * (P)

یادآوری استاتیک (ممان اینرسی):

فاصله × همان چیز = گشتاور هر چیز
ساحت
نیرو



$$Q_x=\int y\,dA$$ (ممان استاتیک نسبت به محور ها) (گشتاور اول سطح نسبت به محور x ها) کاربردی

یا گشتاور سطح

اگر این رابطه را بر A تقسیم کنیم $\bar{y}$ به دست می‌آید یعنی:

$$\boxed{\bar{y}=\frac{\int y\,dA}{A}}$$

مختصات y مرکز سطح

$$\boxed{\bar{x}=\frac{\int x\,dA}{A}}$$

مختصات x مرکز سطح

$$\boxed{Q_y=\int x\,dA}$$ کاربردی

SUBJECT :

Year (   ) Month (   ) Date (   )

مرکز جرم
$$\begin{cases} \bar{x} = \dfrac{\int x\,dm}{m} \\[2mm] \bar{y} = \dfrac{\int y\,dm}{m} \end{cases}$$
$dm = \rho\,dv$ — معادل مرکز جرم

مرکز ثقل:
$$\begin{cases} \bar{x} = \dfrac{\int x\,dw}{w} \\[2mm] \bar{y} = \dfrac{\int y\,dw}{w} \end{cases}$$
$dw = g\,dm$ ، $w = mg$ — معادل مرکز جرم

مرکز حجم:
$$\begin{cases} \bar{x} = \dfrac{\int x\,dv}{v} \\[2mm] \bar{y} = \dfrac{\int y\,dv}{v} \end{cases}$$

در صورتی که جسم همگن باشد مرکز جرم معادل مرکز حجم است

و در صورتی که g ثابت باشد مرکز ثقل و مرکز جرم برابر است.

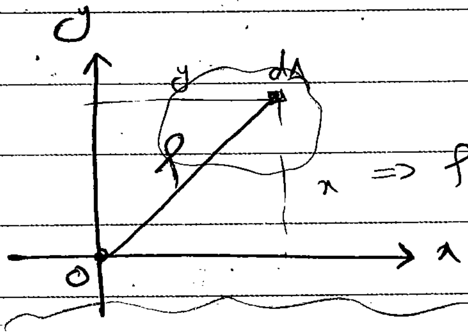
$$I_x = \int y^2\,dA$$ (ممان اینرسی نسبت به x (گشتاور دوم سطح نسبت به محور x ها))

$$I_y = \int x^2\,dA$$ (گشتاور دوم سطح نسبت به محور y ها)

ممان اینرسی قطبی

$$J = \int \rho^2\,dA \xrightarrow[\rho^2 = x^2+y^2]{I_x + I_y = J}$$

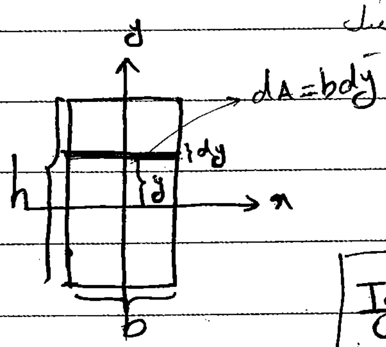
فاصله از محور z ها یعنی فاصله از محور x ها و y ها باشد یا فاصله از نقطه O



$\Rightarrow \rho^2 = x^2 + y^2$

نکته: برای مقاطع مدور بیشتر می‌خواهیم (دایره، نیم‌دایره) و مستطیل

مستطیل:



$$I_x = \int y^2\,dA = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 (b\,dy) = b\left[\frac{y^3}{3}\right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \frac{bh^3}{12}$$ حفظ شود.

$$\boxed{I_y = \frac{hb^3}{12}}$$ حفظ شود.

$$J = I_x + I_y = \frac{bh^3}{12} + \frac{hb^3}{12}$$ برای مستطیل

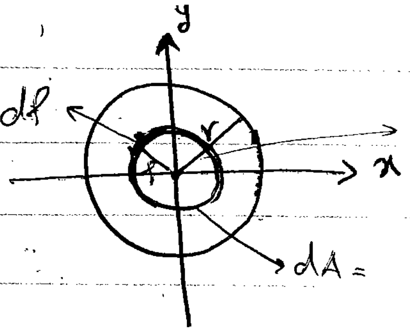
STAEDTLER

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

حل الف

دایره :



$2\pi\rho$ ⟹ تبدیل به مستطیل می‌شود $I d\rho$

$dA = 2\pi\rho\, d\rho$

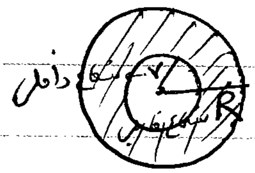
$$J = \int \rho^2 dA = \int_0^r \rho^2 (2\pi\rho\, d\rho) = 2\pi \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^r \Longrightarrow \boxed{J = \frac{\pi r^4}{2}}$$

برای دایره

برای دایره $\Longrightarrow$ $\boxed{I_x = I_y = \frac{J}{2} = \frac{\pi r^4}{4}}$

$$\begin{cases} I_x + I_y = J \\ I_x = I_y \\ I_x + I_x = J \Rightarrow I_x = I_y = \frac{J}{2} \end{cases}$$

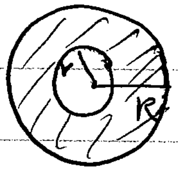
سؤال : $J = ?$



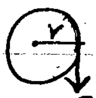
$J = \left(\frac{\pi R^4}{2}\right) - \left(\frac{\pi r^4}{2}\right)$ لوله‌ی توخالی

هاشور زده — دایره خارجی — دایره داخل

حالا حالت : میله‌ی توخالی (لوله‌ی توخالی)



$$J = \frac{\pi}{2}\left(R^4 - r^4\right)$$



τ_{max}

$J = \frac{\pi r^4}{2}$ میله‌ی توپر

برای میله‌ی توپر :

کنترل : $\tau_{max} = \frac{Tr}{J}$ $\xrightarrow[\text{برای توپر}]{J = \frac{\pi r^4}{2}}$ $\tau_{max} = \frac{2T_{\text{موجود}}}{\pi r^3} \leq \tau_{\text{مجاز}}$

در کنترل τ_{max} را قیاس

ظرفیت باربری : $T_{\text{حداکثر مجاز}} = \frac{\tau_{\text{مجاز}} J}{r} = \tau_{\text{مجاز}} \times \frac{\pi r^3}{2}$

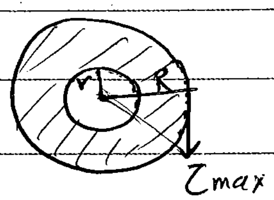
به سمت پایین گرد شود

طراحی : $r_{\text{لازم حداقل}} = \sqrt[3]{\frac{2 \times T_{\text{موجود}}}{\tau_{\text{مجاز}} \times \pi}}$

در گرد کردن به سمت بالا گرد شود

در میله توپر τ_{min} صفر است یعنی تنش در مرکز صفر است.

برای لوله ها :



① کنترل : $\tau_{max} = \dfrac{T_{\text{موجود}} \times R}{\frac{\pi}{2}(R^4 - r^4)} \leq \tau_{\text{مجاز}}$

② ظرفیت باربری : $T_{\text{مجاز}} = \dfrac{\tau_{\text{مجاز}} \times \frac{\pi}{2}(R^4 - r^4)}{R}$

حداکثر
به سمت پایین رند شود.

در طراحی چون بی نهایت جواب داریم یعنی ۱ معادله و ۲ مجهول می شود : طراحی (جواب های مشخص داریم) که در طراحی یا r یا R مجهول است و یا نسبت $\frac{R}{r}$ یا $\frac{r}{R-r}$ را می دهند یا مثلاً می گویند لوله ای داریم به ضخامت ... یعنی اختلاف R و r ضخامت ورق را می دهد

$(۷) \Rightarrow \tau_{max} = \dfrac{Tr}{J}$

هوک : $\gamma_{max} = \dfrac{\tau_{max}}{G}$

$\boxed{\gamma_{max} = \dfrac{Tr}{GJ}}$ (۸) کاربردی است

$(۳) : \gamma_{max} = r\dfrac{\phi}{L}$

$(۹) : \gamma_{max} = \dfrac{Tr}{GJ}$

$\cancel{r}\dfrac{\phi}{L} = \dfrac{T\cancel{r}}{GJ} \Rightarrow \boxed{\phi = \dfrac{TL}{GJ}}$ (۱۰) خیلی مهم و کاربردی است.

σ مجاز داشتیم $\sigma = \dfrac{P}{A} \leq \sigma$ $\quad \tau_{max} = \dfrac{Tr}{J} \leq \tau_{\text{مجاز}}$

$\delta = \dfrac{PL}{EA} \quad \phi = \dfrac{TL}{GJ}$

ادامه در صفحه بعد

دلتا
تغییر شکل محوری
(تغییر طول)
صلبیت محوری - سختی
زاویه پیچش
(تغییر زاویه در پیچش)
صلبیت پیچشی
پیچیدن

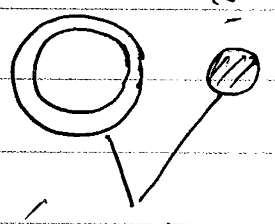
SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

در کشش فشار مساحت مهم است اما در پیچش G مهم است.
در برش هم مساحت مهم است.

$$\delta^{(mm)} = \frac{P^{(N)} L^{(mm)}}{E_{(N/mm^2)} A_{(mm^2)}} \qquad \phi_{\text{(رادیان)(بدون بعد)}} = \frac{T^{(N.mm)} L^{(mm)}}{G_{(N/mm^2)} J_{(mm^4)}}$$

چند درجه پیچید $x^\circ = \frac{\pi}{180} \times x$



~~مقاومت کششی لوله بیشتر است~~

$$P_{مجاز} = \sigma_{مجاز} \times A_{موجود}$$

جنس و مساحت یکسان

چون جنس و مساحت یکسان است
طبق رابطه‌ی $P_{مجاز} = \sigma \times A_{موجود}$
پس هر دو در مقابل کشش و فشار یکسانی دارند.

میله دوم:
- قوی‌ترین بود $\tau_{مجاز}$ بیشتر (در مقابل کشش و فشار)
- صلب‌تر بودن $\phi_{مجاز}$ کمتر

تغییر شکل ندهد

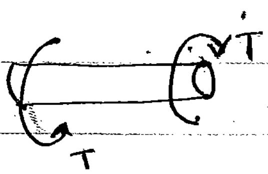
صلبیت پیچشی به J بستگی دارد.
صلبیت محوری به E و A بستگی دارد چون در این شکل جنس و مساحت یکسان است پس صلبیت محوریشان یکی است:

$$\varphi = \Phi = \frac{TL}{GJ}$$ کاربرد فرمول شماره‌ی ۱۰؟

الف) برای به کار بردن فرمول ۱۰ در تمام طول L باید ۳ شرط زیر برقرار باشد:

شرط اول: گشتاور پیچشی (T) فقط در ۲ سر عضو اعمال شود (T ثابت باشد)

شرط دوم: همگن باشد (G ثابت باشد)



شرط سوم: مقطع یکنواخت باشد (J ثابت باشد)

همه جا ثابت است و ۲ گشتاور اعمال شده است.

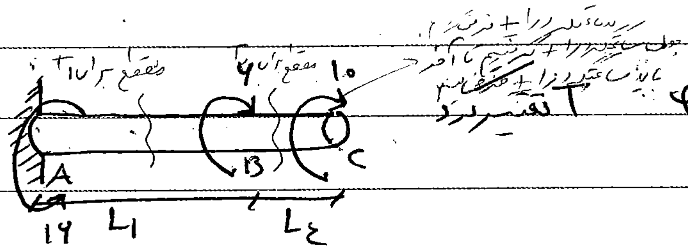
SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

$x^\circ = \frac{\pi}{180} \times \pi$

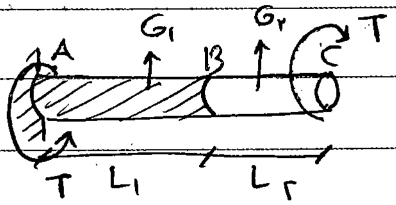
ب) اگر T ، G یا J در طول عضو به صورت ناگهانی (غیر تدریجی) تغییر نماید زاویه‌ی پیچش کلی میله [یعنی در کل میله چقدر می‌پیچد] از فرمول زیر بدست می‌آید:

$$\varphi = \Phi = \sum_{i=1}^{n} \phi_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{T_i L_i}{G_i J_i}$$



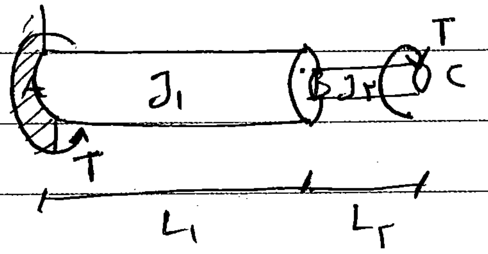
T تغییر کرد

$$\varphi = \frac{1}{GJ}\left(T_1 L_1 + T_2 L_2\right)$$



چون تغییر کرده (G)

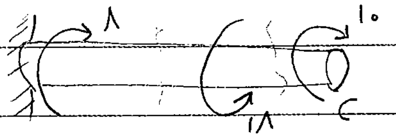
$$\varphi = \frac{T}{J}\left(\frac{L_1}{G_1} + \frac{L_2}{G_2}\right)$$



J تغییر کرد

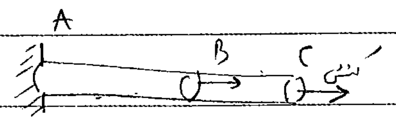
$$\varphi = \frac{T}{G}\left(\frac{L_1}{J_1} + \frac{L_2}{J_2}\right)$$

سؤال:



$$\varphi = \frac{1}{GJ}\left(T_1 L_1 + T_2 L_2\right)$$

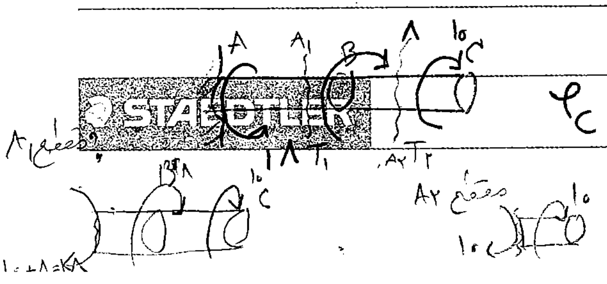
سؤال:



$\delta_C = \delta_{AC} = \delta_{AB} + \delta_{BC} = \delta_{CA} = \delta_{BA} + \delta_{CB}$

جابجایی نقطه‌ای

اما در پیچش این صفت نیست: $\varphi_{AB} \neq \varphi_{BA}$



$$\varphi_C = \varphi_{AC} = \varphi_{AB} + \varphi_{BC} \neq \varphi_{AB} + \varphi_{CB}$$

$\varphi_{CB} \neq \varphi_{BC}$

SUBJECT :

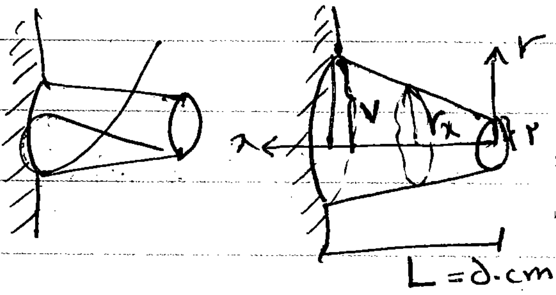
Year ( ) Month ( ) Date ( )

ج) اگر T، G و J در طول عضو به طور تدریجی تغییر کنند، از فرمول انتگرالی زیر زاویه‌ی φ را بدست می‌آوریم:

$$\varphi=\int_0^L \frac{T_x\,dx}{G_x J_x}$$

که این فرمول سه حالت دارد یعنی J تدریجی تغییر کند

تبدیل به مخروط ناقص می‌شود:



$$\varphi=\frac{T}{G}\int_0^L \frac{dx}{J_x}=\frac{T}{G}\int_0^L \frac{dx}{\frac{\pi}{2}r_x^4}$$

معادله‌ی خط است.

$$\boxed{r_x = 2+0.1x}$$

برای این که G تدریجی تغییر کند (حتی تدریجی تغییر کند نداریم)

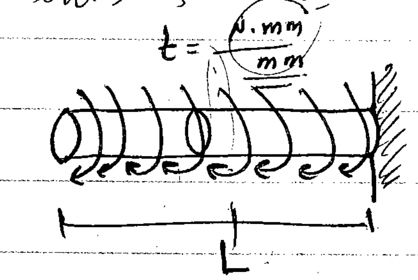
$$T = t\cdot L \quad (N.mm)$$

← کل گشتاور پیچشی

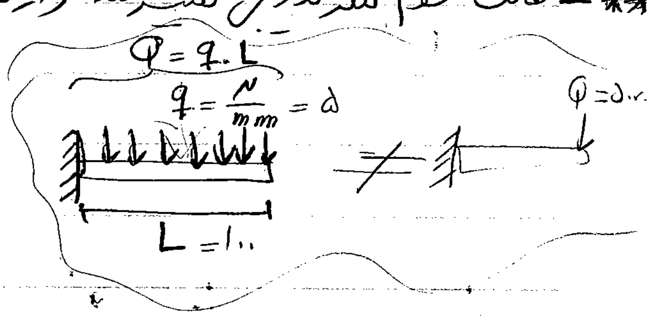
یعنی هر 1mm چقدر گشتاور تحمل می‌کند

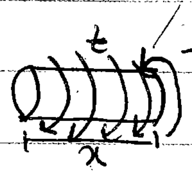
$$t = \frac{N.mm}{mm}$$

** حالت سوم گشتاور تدریجی تغییر کند (از همه مهم‌تر است):



شبیه ⇒





$$T_x = t\cdot x$$

$$\varphi=\frac{1}{GJ}\int_0^L T_x\,dx=\frac{1}{GJ}\int_0^L t\cdot x\,dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi=\frac{t}{GJ}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^L=\frac{tL^2}{2GJ}=\boxed{\frac{T\cdot L}{2GJ}}$$

نکته: اگر میله‌ای را به طور گسترده بپیچانیم زاویه‌ی پیچشی آن برابر است با نصف حالتی که یک گشتاور در وسط میله داشته باشیم و بپیچانیم): جمع؟

مثلاً دو تا فرمول:

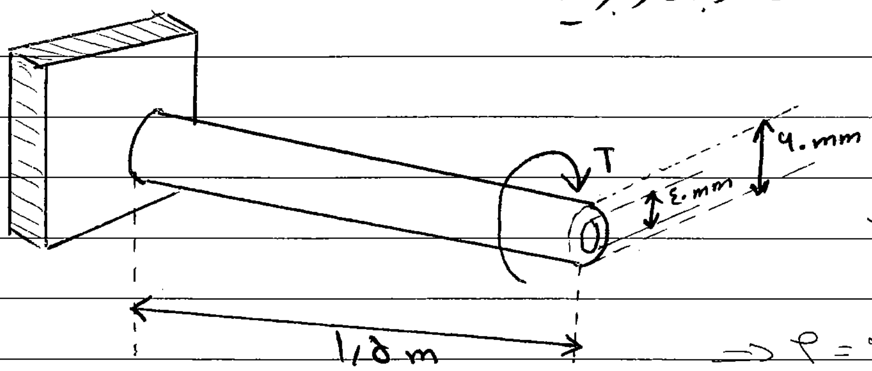
$$\tau_{max}=\frac{Tr}{J} \quad و \quad \varphi=\frac{TL}{GJ}$$

که برای دایره هستند

No...............

مثال ۲.۳ ص ۹۲ :

چه گشتاوری باید بر انتهای میل گردان وارد کرد تا پیچشی برابر با 2° ایجاد شود؟ برای مدول صلابت فولاد مقدار $G = 77\,Gpa$ را به کار برید



$T = ?$

$\varphi = 2^\circ = \frac{\pi}{180} \times 2 = 0.03491 \Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi = 34.9 \times 10^{-3}\ rad$

$$\varphi = \frac{TL}{GJ} \Rightarrow T = \frac{\varphi G J}{L} = \frac{34.9\times10^{-3} \times 77\times10^{9} \times \frac{\pi}{2}\left((30\times10^{-3})^4 - (20\times10^{-3})^4\right)}{1.5} = 1.830\ kN.m$$

* مثال ۳.۳ ص ۹۲ :

تنش برشی $70\,Mpa$ بر سطح داخلی میل گردان های فولادی توخالی مثال قبل چه زاویه‌ی پیچشی را ایجاد می‌کند؟

چون تنش در سطح داخلی را داده، یعنی ما دیگر به سطح خارجی احتیاج نداریم. و همه جا سطح داخلی را می‌گذاریم

$\varphi = ?\quad \tau = 70\times10^{6}\ pa \qquad \varphi = \frac{TL}{GJ} \Rightarrow \tau = \frac{TR}{J}$

$$T = \frac{\tau \cdot \frac{\pi}{2}(r^4)}{r} = \frac{70\times10^{6} \times \frac{\pi}{2}(20\times10^{-3})^4}{20\times10^{-3}} = 879.64\ (N.m)$$

1319.468915

$$\varphi = \frac{TL}{GJ} = \frac{879.64\times1.5}{77\times10^{9}\times\frac{\pi}{2}(20\times10^{-3})^4} = 0.06818 = 68.18\times10^{-3}\ rad$$

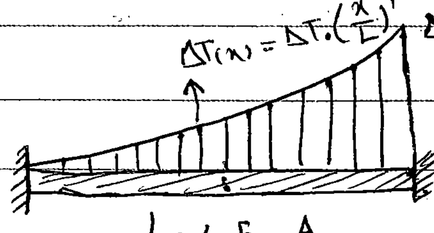
$$\boxed{\varphi^\circ = 68.18\times10^{-3}\times\frac{180}{\pi} = 3.91^\circ}$$

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

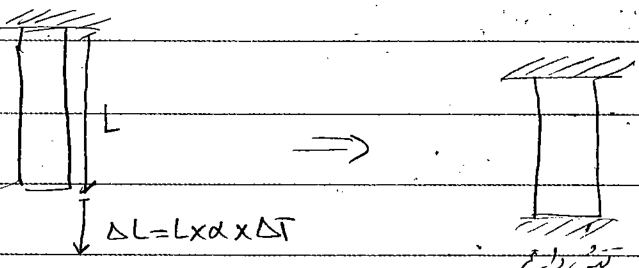
مقاومت ۱ حل تمرین :

$F = 0$ محوری

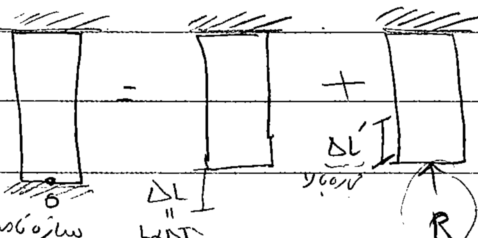


$\Delta L = L\alpha\Delta T$ تغییر طول

تنش: مقاومت در برابر تغییر شکل



چون تنها سر آن باز است پس $\sigma = 0$ تنش است چون هرچقدر دما به آن اعمال شود طول آن افزایش پیدا می‌کند ولی اگر آن سر باز را ببندیم در این صورت تنش داریم.



چون نیرو فشاری است تنش منفی طول داریم

تبدیل به سازه معین شد

اصل برهم نهی

$\Delta L' = \frac{RL}{EA}$

چون کاهش طول است ⊖ می‌گیریم

چون افزایش طول است ⊕ می‌گیریم

طبق اصل سازگاری $\Rightarrow \Delta L + \Delta L' = 0$

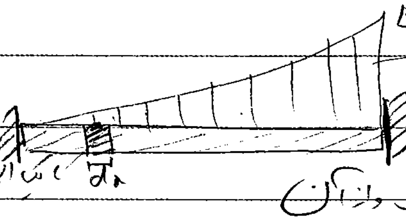
$L\alpha\Delta T - \frac{RL}{EA} = 0$

$L\alpha\Delta T = \frac{RL}{EA}$

$\Rightarrow \boxed{R = E\cdot A\cdot\alpha\Delta T}$

$\sigma = \frac{E\cdot A\cdot\alpha\Delta T}{A} = E\cdot\alpha\cdot\Delta T \Leftarrow \sigma = \frac{P}{A}$ اگر تنش را می‌خواست با توجه به اینکه

اگر نیروی داخلی را هم خواست هم همان R که بدست آوردیم می‌شود.



چون دما به صورت متغیر است تغییر طول به راحتی بدست نمی‌آید تا تغییر طول یک جزء از آن را در نظر می‌گیریم که مثل مثال قبل است و از آن

یک المان از آن را دارد

حل مسئله :

$\Delta_{dx} = L\times\alpha\cdot\Delta T = dx\times\alpha\times\Delta T$ تغییر طول المان — انتگرال می‌گیریم

تغییر طول کل میله ناشی از دما $\Delta = \int_0^L \alpha\Delta T\,dx = \int_0^L \alpha\left(\Delta T_0 \frac{(x)^2}{L^2}\right) dx = \frac{RL}{EA} \Rightarrow \frac{\alpha\Delta T_0}{L^2}\int_0^L x^2\,dx = \frac{RL}{EA}$

$\Rightarrow R = \frac{E\times\alpha\times A\times\Delta T_0}{3}$ $\sigma = \frac{E\alpha\Delta T_0}{3}$

SUBJECT :

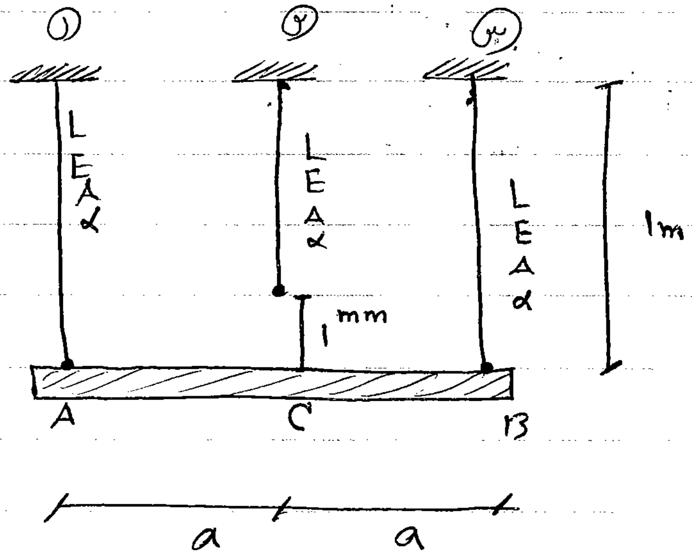
Year ( ) Month ( ) Date ( )

خیلی مهم (امتحانی)

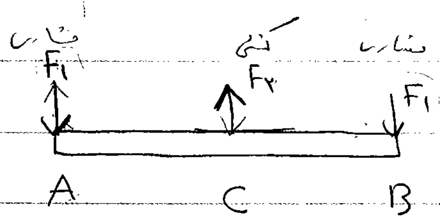
مثال: در شکل مقابل میله‌ی وسط را کشیده و به وسط قطعه‌ی صلب AB (نقطه‌ی C) متصل می‌کنیم سپس ۳ میله را به اندازه‌ی $\Delta T = 50^{\circ}C$ گرم می‌کنیم، تنش در ۳ میله را بدست آورید

جدول الاستیسیته

$$\begin{cases} E = 2\times10^{5}\ \left(\frac{N}{mm^2}\right) \\ A = 300\ mm^2 \\ \alpha = 1{,}2\times10^{-5}\ \frac{1}{C^{\circ}} \\ L = 1m \end{cases}$$



وقتی میله‌ی وسط کشیده می‌شود میله‌های کناری فشرده می‌شوند. یعنی در میله‌ی ۱ و ۳ تنش فشاری داریم و در میله‌ی ۲ تنش کششی داریم.



سه تا نیرو و سه تا مجهول داریم، و چون طبق استاتیک می‌دانیم اگر از نقطه‌ی وسط (C) گشتاور بگیریم آنگاه $F_1 = F_3$ برابر می‌شوند که ما F_1 فرض می‌کنیم
پس کلاً دو نیروی مجهول داریم.

$1^{mm} =$ کاهش طول میله‌های کناری + افزایش طول میله‌ی میانی

تعادل در راستای قائم: $F_2 - 2F_1 = 0 \Longrightarrow F_2 = 2F_1$

افزایش طول میله‌ی میانی $= L\alpha\Delta T + \frac{2F_1L}{EA}$

کاهش طول میله‌های کناری $= L\alpha\Delta T - \frac{F_1L}{EA}$ ← چون فشاری است برای میله‌ی کناری منفی

$$\Longrightarrow \left(L\alpha\Delta T + \frac{2F_1L}{EA}\right) + \left(L\alpha\Delta T - \frac{F_1L}{EA}\right) = 1$$

$$\Longrightarrow F_1 = \frac{E\times A\times 1}{3L} = \boxed{20000\ (N)} = 20kN$$

$E = 2\times10^5$, $A = 300$, $L = 1000\ mm$

$$\boxed{F_2 = 40000} = 40kN$$

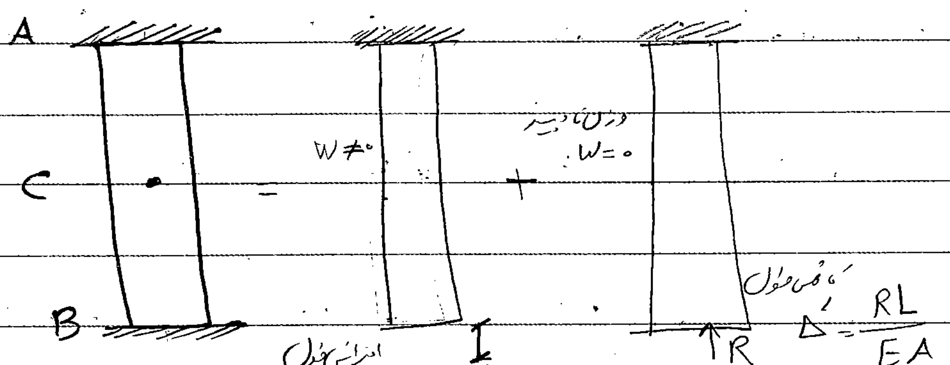
SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

$$\sigma_{①} = \frac{F_1}{A} = \frac{۲۰۰۰}{۳۰۰}$$

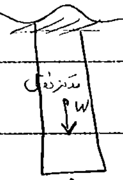
$$\sigma_{②} = \frac{۴۰۰۰}{۳۰۰} \qquad \sigma_{③} = \frac{۲۰۰۰۰}{۳۰۰}$$

مثال: میله‌ای با مشخصات داده شده (E و A و L و W (وزن میله)) مطابق شکل به دو تکیه‌گاه صلب A و B متصل شده است تنش را در نقاط A و B و C (وسط میله) تعیین نمایید.



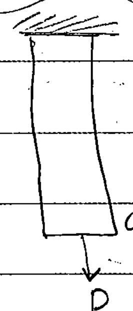
افزایش طول $\Delta = \frac{w(\frac{L}{2})}{EA}$ ، کاهش طول $\Delta' = \frac{RL}{EA}$

نکته:



$\Delta L = \frac{W \times \frac{L}{2}}{EA}$ تغییر طول میله تحت تاثیر وزن

اما

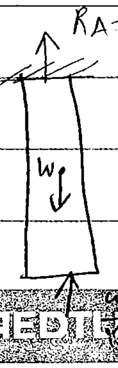


$\Delta L = \frac{PL}{EA}$ تغییر طول میله تحت نیروی خارجی

وقتی وزن ناچیز نباشد وزن را باید در مرکز ثقل آن قرار داد که در این صورت L تبدیل به $\frac{L}{2}$ می‌شود.

معادله سازگاری: $|\Delta| = |\Delta'| \Rightarrow \frac{wL}{2EA} = \frac{RL}{EA} \Rightarrow \boxed{R = \frac{w}{2}}$

$R_A = \frac{w}{2} \rightarrow \boxed{\sigma_A = \frac{w}{2A}}$



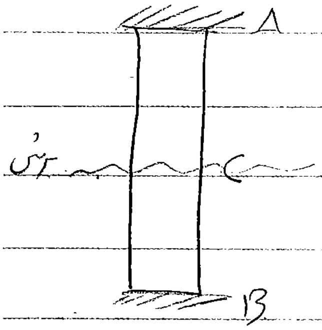
$R_B = \frac{w}{2} \rightarrow \boxed{\sigma_B = \frac{w}{2A}}$

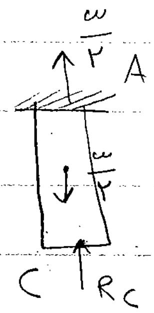
SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

تنش در نقطه‌ی C :

در هر نقطه‌ای تنش را می‌خواهیم باید برش بزنیم .

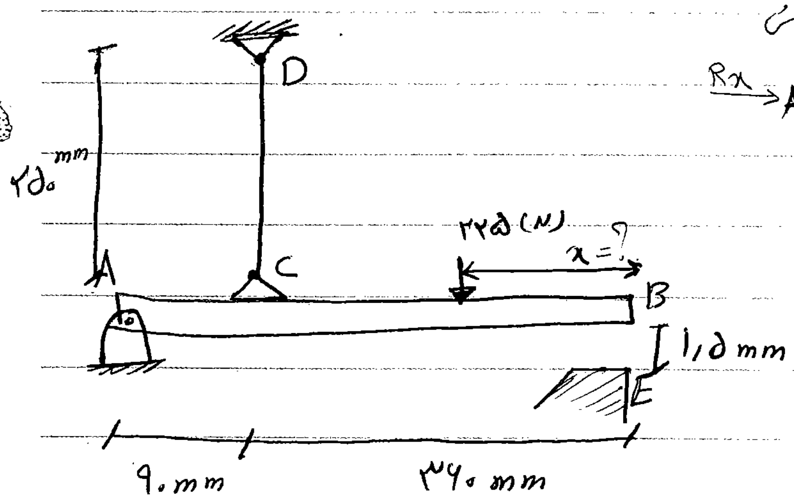


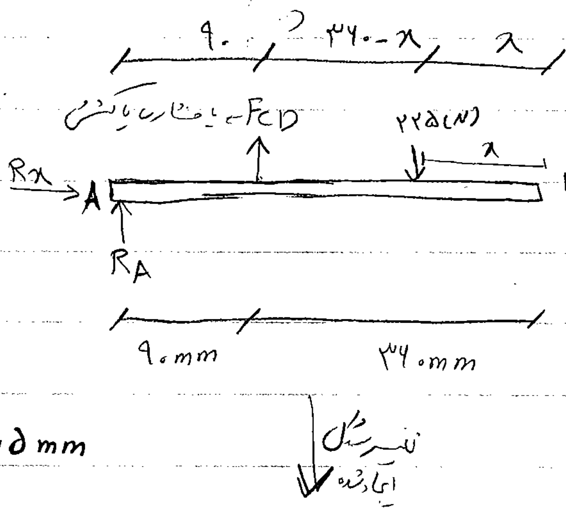


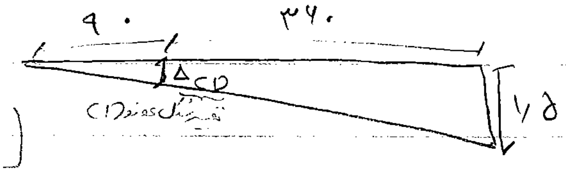
$\Sigma F_y = 0 \Longrightarrow \boxed{R_C = 0} \rightarrow \boxed{\sigma_C = 0}$

مثال: طول سیم فولادی CD به قطر 2mm طوری تنظیم شده است بدون این که باری بر آن وارد شود بین نقطه‌ی B (انتهای تیر صلب AB) و تکیه‌گاه E فاصله‌ی 1.5mm وجود داشته باشد. با دانستن $E = 200\,GPa$ برای سیم فولادی مشخص نمایید در چه نقطه‌ای بار 225(N) را باید بر تیر وارد کرد تا بین نقاط B و E تماس حاصل شود؟

در حال تماس B و E شروع عکس‌العمل نداریم چون فقط در حد تماس است







تشابه مثلث: $\frac{\Delta}{1.5} = \frac{90}{360} \Longrightarrow \boxed{\Delta = 0.375\,mm}$

$\Delta_{CD} = \frac{F_{CD} L}{EA} \Longrightarrow 0.375\times10^{-3} = \frac{F_{CD}\times 250\times10^{-3}}{200\times10^{9}\times\pi(10^{-3})^2} \Longrightarrow \boxed{F_{CD} = 754\,N}$

قطر = 2mm
شعاع = 1mm

جهت F_{CD} را درست فرض کرده‌ایم (+) درآمده

SUBJECT :

Year (   ) Month (   ) Date (   )

اگر حول نقطه‌ی A گشتاور بگیریم خواهیم داشت:

$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow \boxed{x = 141.4\,mm}$

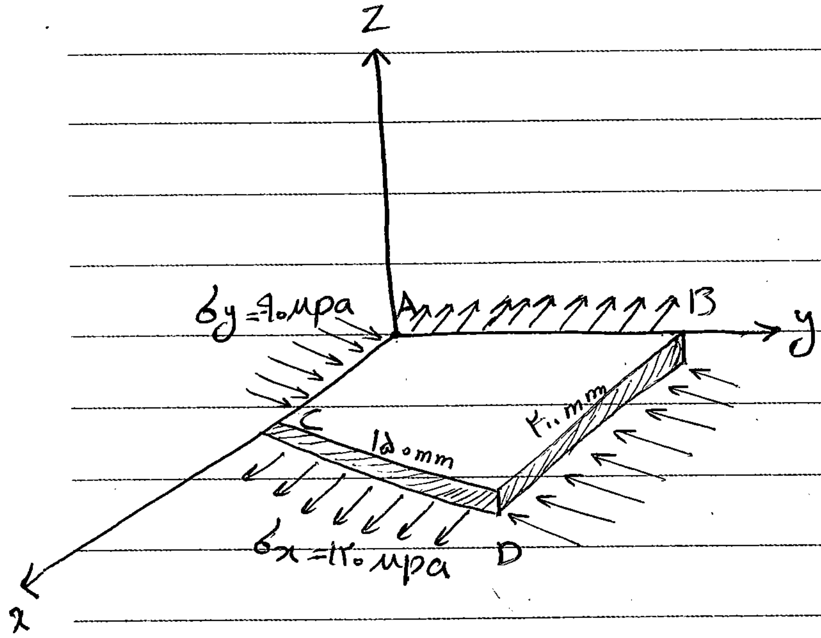
مثال: صفحه‌ی آلومینیومی به ابعاد $200\,mm \times 150\,mm \times 20\,mm$ ~~mm~~ مطابق شکل تحت تنش

$\sigma_x = 120\,Mpa$ و $\sigma_y = -90\,Mpa$ واقع شده است درصورتی که داشته باشیم

$E = 7\times10^{4}\,Mpa$

$\nu = \frac{1}{3}$ ضریب پواسون

پس از اعمال تنش‌های فوق مطلوبست:



الف) طول قطر AC

ب) ضخامت صفحه

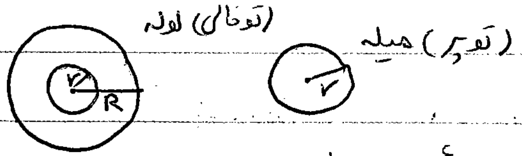
ج) حجم صفحه

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

یادآوری : فقط برای مقاطع مدور :

$$\tau = \frac{Tr}{J} \quad , \quad \varphi = \frac{TL}{GJ}$$



$$J = \frac{\pi}{2}(R^4 - r^4) \qquad J = \frac{\pi}{2} r^4$$

این فرمول ها چه جدار نازک باشد چه نباشد کاربرد دارد

$$\tau_{max} = \frac{TR}{\frac{\pi}{2}(R^4 - r^4)} \qquad \tau_{max} = \frac{T}{\frac{\pi}{2} r^3}$$

$$\varphi = \frac{TL}{G\frac{\pi}{2}(R^4 - r^4)} \qquad \varphi = \frac{TL}{G\frac{\pi}{2} r^4}$$

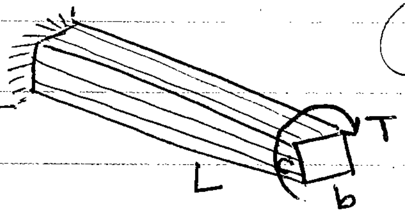
پیچش مقاطع مستطیلی توپر : (یعنی میله‌ای که مقطع آن مستطیل است)

* $b > c$ حتما باید

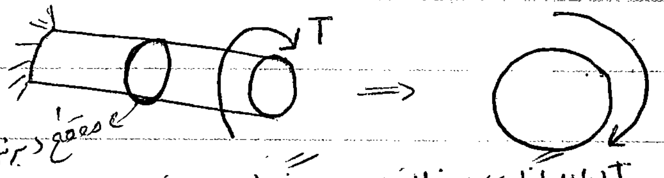
b = طول مقطع مستطیلی شکل

c = عرض مقطع

L = طول میله

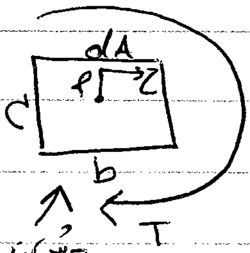


مثلا برای دایره :



$$T = \int$$

T را باید گشتاور در خلاف جهت گشتاور اصلی اعمال کنیم



$$\boxed{T = \int \rho \, \tau \, dA}$$

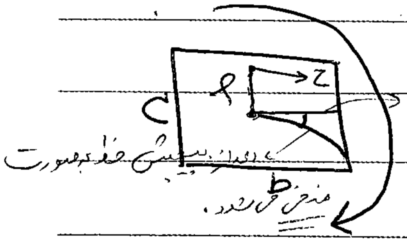
* این قانون که اجسام بعد از گشتاور خطوط موازی می‌مانند

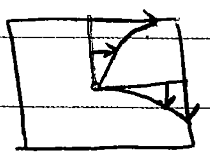
فقط برای دایره صادق است *

یعنی در این جا برای مستطیل خطوط موازی که روی مستطیل توپر کشیده شده اگر تحت گشتاور T قرار بگیرد خطوط آن موازی نمی‌مانند

SUBJECT :

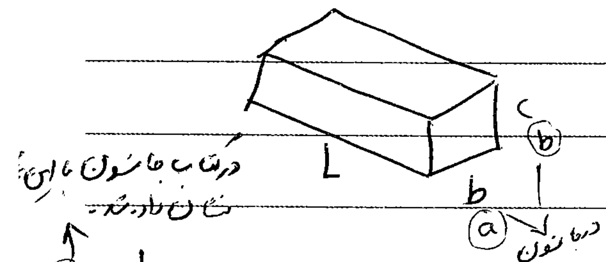
Year (   ) Month (   ) Date (   )





توزیع تنش به این صورت است.

در مقطع مستطیلی اگر فرض کنیم ابعاد مقطع b و c باشد و طول L باشد تحت پیچش قرار بگیرد آن گاه:



$$\tau_{max} = \frac{T}{\alpha b c^2}$$ اثباتش گفته نمی‌شود

$$\varphi = \frac{TL}{G\beta b c^3}$$ اثباتش گفته نمی‌شود

$\frac{a}{b}$ یا $\frac{b}{c}$	۱	۲	۳	.....	۱۰	>۱۰
C_1 α	۰/۲۰۸	۰/۲۱۹			۰.۳۱۲	0.333
C_2 β	۰/۱٤۰۶				۰.۳۱۲	0.333

0.333 → دارد میل می‌کند / تبدیل به ثابت شده

α و β را باید از جدول بیاورد

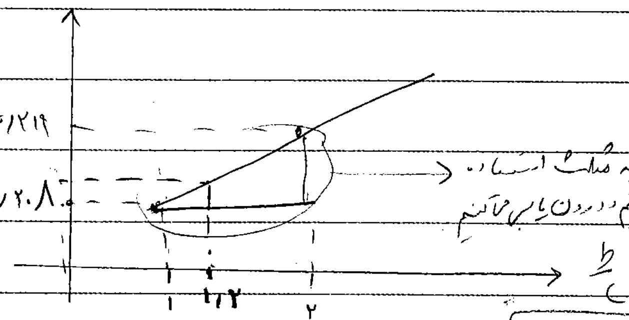
نباید حفظ کنیم.

α و β به $\frac{b}{c}$ بستگی دارد.

(α و β داده می‌شود یا از طریق جدول داده می‌شود)

if $\frac{b}{c} = 1 \xrightarrow{\text{یعنی}}$ مقطع مربع است

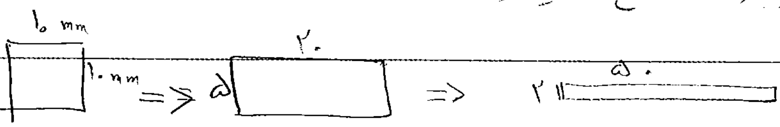
درون یابی:



از تشابه مثلث استفاده می‌کنیم و درون یابی می‌کنیم

$\boxed{\text{بهترین مقطع مستطیلی مربع است. یعنی } \frac{b}{c} = 1}$ *

هر چه نسبت $\frac{b}{c}$ بیشتر باشد مقطع ضعیف‌تر است.



$\frac{b}{c} = 1$ میله

راحت‌تر از میله پیچش می‌کند $\frac{b}{c} = 4$

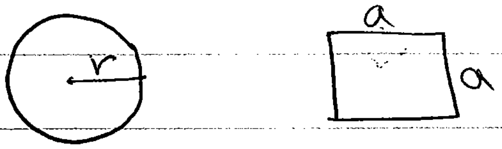
راحت‌تر از همه می‌پیچد.

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

سؤال امتحانی: میله ی توپر به شعاع r (سؤال مفهومی)

مربع به اضلاع a



$$\tau_{max}=\frac{T}{\frac{\pi}{2}r^3}<\tau_0 \xrightarrow{\text{مقایسه}} \tau_{max}=\frac{T}{\alpha bc^2}=\frac{T}{0.208a^3}<\tau_0$$

$$\varphi=\frac{TL}{G\frac{\pi}{2}r^4} \xrightarrow{\text{مقایسه}} \varphi=\frac{TL}{G\beta bc^3}=\frac{TL}{G(0.1406)a^4}$$

الف) در صورتیکه جنس و مساحت یکسان باشد — باید نسبت بزرگتر از ۱ باشد

وقتی جنس ها برابرند: یعنی G و وزن مخصوص و τ_0 (تنش مجاز) یکسان

$$\frac{T_1 \text{ مجاز}}{T_2 \text{ مجاز}}=?$$ نسبت ظرفیت باربری

چون مساحت یکسان است یعنی داریم: $\pi r^2=a^2$ باید r^3 و a^3 را داشته باشیم

طرفین را به توان $\frac{3}{2}$ می رسانیم: $\pi\sqrt{\pi}r^3=a^3$

$$\frac{T_1}{T_2}=\frac{\tau_0\times\frac{\pi}{2}r^3}{\tau_0\times(0.208)a^3}$$ (چون جنس یکسان است)

$$=\frac{\frac{\pi}{2}r^3}{(0.208)(\pi\sqrt{\pi}r^3)}=1.356>1$$

در صورتیکه جنس و مساحت یکی باشد: هر دایره از هر مربع ۳۶٪ قوی تر است

یعنی یک میله ی دایره ای از یک میله ی مربعی شکل گشتاور بیشتری تحمل می کند

ب) در صورتیکه طول یکسان باشد و گشتاور پیچشی یکسان داشته باشد (یعنی علاوه بر موارد فوق)

می خواهیم ببینیم کدام φ کمتری دارد

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_2}=?$$ باید کوچکتر از ۱ باشد

مساحت یکسان: $(\pi r^2=a^2)^2$ باید r^4 و a^4 را داشته باشیم، به توان ۲ می رسانیم

$$\pi^2r^4=a^4$$

$$\frac{\varphi_{\text{دایره}}}{\varphi_{\text{مربع}}}=\frac{\frac{\cancel{TL}}{\cancel{G}\frac{\pi}{2}r^4}}{\frac{\cancel{TL}}{\cancel{G}(0.1406)\underbrace{a^4}_{\pi^2r^4}}}=0.88<1$$

دایره از مربع ۱۲٪ کمتر می پیچد

یعنی دایره مناسب تر است (سخت تر از آن می باشد)

به طور کلی در اشکال هر چه تعداد اضلاع بیشتر باشد بهتر است پس با فرض جنس و مساحت یکسان بهترین دایره است (چون n = ∞) و بدترین مثلث است

از نظر ظرفیت باربری

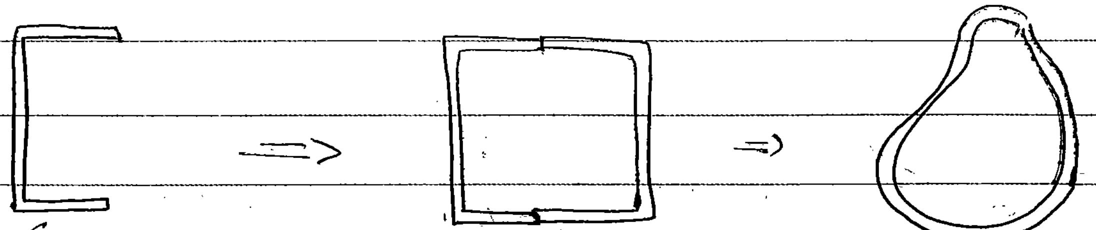
هر چه T بزرگتر و φ کمتر باشد ظرفیت بهتر است

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

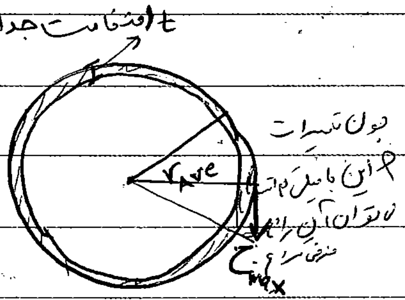
- پیچش مقاطع جدار نازک بسته [جدار نازک توخالی] :

ضخامت جداره کم باشد.



این نوع مقاطع به ۲ دسته تقسیم می‌شوند : مقاطع مدور _ مقاطع کلی

پیچش مقاطع مدور جدار نازک بسته :



$$J=\int_{r_{Ave}} \rho^2 dA \simeq r_{Ave}^2 \times A = r_{Ave}^2 \times (2\pi r_{Ave} \times t) = 2\pi r_{Ave}^3 t$$

چون تغییرات در این فاصله کم است نتوان آن را ثابت فرض کرد

فرمول

$t\ \overline{\ 2\pi r_{Ave}\ }$

چون دایره است پس تنش برابر است

$$\Rightarrow \tau_{max} = \frac{T r_{Ave}}{J} = \frac{T r_{Ave}}{2\pi r_{Ave}^3 \times t} = \frac{T}{2\pi r_{Ave}^2 t} \leq \tau_{مجاز}$$

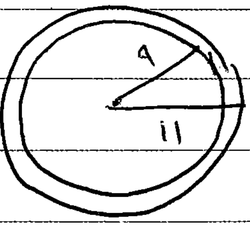
کنترل :

تنش

$$\boxed{\tau_{max} = \frac{T}{2\pi r_{Ave}^2 \times t}}$$

برای جدار نازک

اگر مقاطع دایروی شکل دارند نباید از این فرمول استفاده کرد. چون دیگر جدار نازک نیست



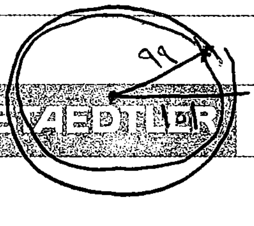
$$\begin{cases} J_{دقیق} = \frac{\pi}{2}(11^4 - 9^4) \\ J_{تقریبی} = 2\pi (\underbrace{10}_{r_{Ave}})^3 \times 2 \end{cases}$$

نکته : مهم است

مثلا

$\text{if } \frac{r_{Ave}}{t} \geq 10$: پس $\frac{t}{r_{Ave}} \leq \frac{1}{10}$

آن گاه جداره نازک است

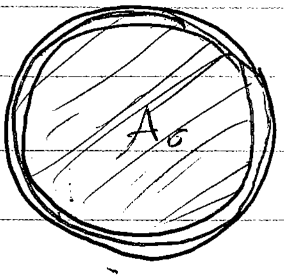


$$\begin{cases} J_{دقیق} = \frac{\pi}{2}(101^4 - 99^4) \\ J_{تقریبا} = 2\pi (100)^3 \times 2 \end{cases}$$

SUBJECT :

Year (   ) Month (   ) Date (   )

پیچش مقاطع کلی جدار نازک است :



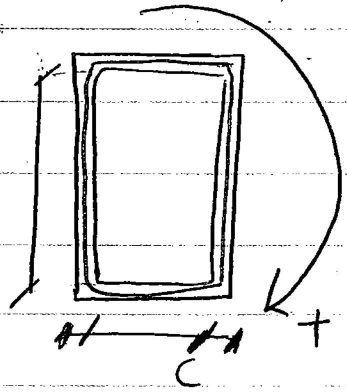
$$\boxed{A_0 = \pi r_{Ave}^2}$$

$$\boxed{\tau_{max} = \frac{T}{2A_0 t_{min}}}$$

فرمول کلی

A_0 می تواند هر چیزی باشد

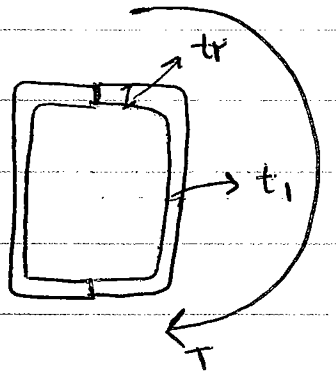
فرمول خیلی کاربردی است برای جدار نازک



$$\tau_{max} = \frac{T}{2\underbrace{bc}_{A_0}t} \leq \tau_{\text{مجاز}}$$

$$A_0 = b \times c \qquad \varphi = \frac{\tau_{max}\left[2(b+c)\right] \times L}{2bcG}$$

با توجه به فرمول صفحه بعد



برای مقاطع مدور :

$$\text{می دانیم:} \quad \varphi = \frac{TL}{GJ} = \frac{\tau_{max} \times 2\pi r_{Ave}^2 t \times L}{G \times 2\pi r_{Ave}^3 t} =$$

$$\Longrightarrow \boxed{\varphi = \frac{\tau_{max} \times L}{G \times r_{Ave}}}$$

برای مقاطع مدور جدار نازک

SUBJECT :

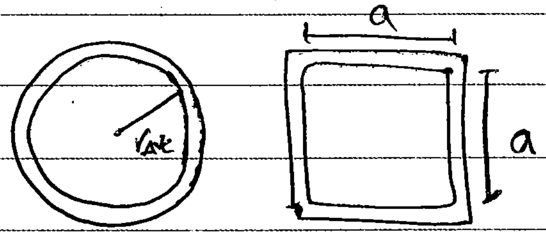
Year (   ) Month (   ) Date (   )

برای مقاطع گرد ثابت $(r\times t)$ را از صورت و مخرج با هم ساده کنیم.

$$\varphi = \frac{TL}{GJ} = \frac{\tau_{max}\times 2\pi r_{Ave}^{2}\, t\times L}{G\times 2\pi r_{Ave}^{3}\, t} = \frac{\overbrace{2\pi r_{Ave}}^{S=\text{محیط}}\times \tau_{max}\times L}{\underbrace{2\pi r_{Ave}^{2}}_{\text{مساحت}=A_0}\times G} \Longrightarrow \boxed{\varphi = \frac{\tau_{max}\cdot S\cdot L}{2A_0\cdot G}}$$

فرمول برای مقاطع گرد جدار نازک

مثال: سؤال امتحان.



① ②

الف) در صورتیکه مساحت (t, S) و ضخامت یکسان باشد. (یعنی A_0 ثابت ... را لازم داریم)

$$\frac{T_1}{T_2} = ? = \frac{\cancel{\tau}\times 2\pi r_{Ave}^{2}\times \cancel{t}}{\cancel{\tau}\times 2a^2\times \cancel{t}} =$$

محیط یکسان: $2\pi r = 4a \Rightarrow \pi r = 2a \Rightarrow \pi^2 r^2 = 4a^2$, $a^2 = \frac{\pi^2 r^2}{4}$

$$= \frac{4}{\pi} = 1.27 > 1$$

باشد لذا ... ظرفیت گشتاور لوله از مربع بیشتر است.

ب) در صورتیکه طول یکسان و گشتاور یکسان قرار بگیرد.

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_2} = ?$$

از رابطه $\frac{TL}{GJ}$ استفاده هم می‌توان کرد

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_2} = \frac{\frac{\tau_1 S L}{2A_{01}G}}{\frac{\tau_2 S L}{2A_{02}G}} = \frac{\tau_1}{\tau_2}\times\frac{(A_{02})}{(A_{01})} = \frac{\pi}{4}\times\frac{\pi}{4} = \frac{\pi^2}{16} = 0.61 < 1$$

$$\frac{(A_0)_2}{(A_0)_1} = \frac{a^2}{\pi r_{Ave}^2} = \frac{\frac{\pi^2 r^2}{4}}{\pi r^2} = \frac{\pi}{4}$$

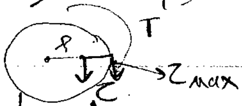
در این جا هم برابر است ... لوله از همه بهتر است. مقطع لوله از همه بهتر است.

$$\frac{(\tau_1)_{max}}{(\tau_2)_{max}} = \frac{\frac{T}{2A_{01}t}}{\frac{T}{2A_{02}t}} = \frac{\pi}{4}$$

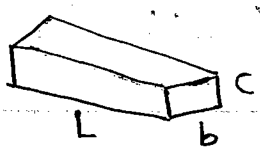
SUBJECT ( ) Year ( ) Month ( ) Date ( )

برای اینکه تنش برشی را در یک نقطه دلخواه که در فاصله ρ از مرکز قرار دارد بدست آورد

$\tau = \frac{T\rho}{J}$ تنش در هر نقطه دلخواه



خلاصه:

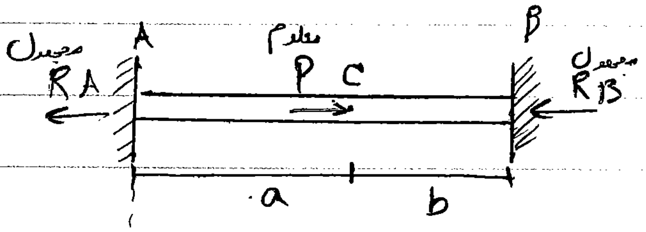
پیچش مقاطع مدور		پیچش مقاطع مستطیلی توپر	پیچش مقاطع جدار نازک بسته (جدار نازک توخالی)	
$\tau_{max} = \frac{Tr}{J}$ و $\varphi = \frac{TL}{GJ}$			مدور	کلی
میله: $J = \frac{\pi}{2} r^4$	لوله: $J = \frac{\pi}{2}(R^4 - r^4)$	$\tau_{max} = \frac{T}{\alpha b c^2}$	$\tau_{max} = \frac{T}{2\pi r_{Ave}^2 t}$	$\tau_{max} = \frac{T}{2A_0 t_{min}}$
$\tau_{max} = \frac{T}{\frac{\pi}{2} r^3}$	$\tau_{max} = \frac{TR}{\frac{\pi}{2}(R^4 - r^4)}$	$\varphi = \frac{TL}{G\beta b c^3}$	$\varphi = \frac{\tau_{max} \times L}{G \times r_{Ave}}$	$\varphi = \frac{\tau_{max} \cdot s \cdot L}{2A_0 \cdot G}$
$\varphi = \frac{TL}{G\frac{\pi}{2} r^4}$	$\varphi = \frac{TL}{G\frac{\pi}{2}(R^4 - r^4)}$			

حل مسائل نامعین:

تعداد مجهولات > تعداد معادلات = نامعین از نظر استاتیکی

میله‌ای دو سر گیردار:

یادآوری:



$$\begin{cases} R_A = P\frac{b}{L} \\ R_B = P\frac{a}{L} \end{cases}$$

اگر P در وسط وارد شود در حالت خاص $\Longrightarrow R_A = R_B$

SUBJECT :

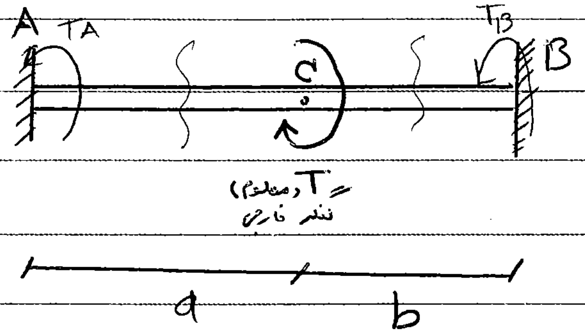
Year ( ) Month ( ) Date ( )

حل مسائل نامعین :

مثال : میله‌ی دو سر گیردار

$T_A = ?$ $T_B = ?$

جهت نگاه



وقتی T به آن وارد می‌شود T_A و T_B عکس‌العمل به وجود می‌آیند که با آن مقاومت می‌کنند.

معادله‌ی تعادل : $\Sigma M_x = 0 \Rightarrow \boxed{T_A + T_B = T_{\text{معلوم}}}$

معادله‌ی سازگاری تغییر شکل : $\varphi_{AB} = 0 \Rightarrow \boxed{\varphi_{AC} + \varphi_{CB} = 0}$ معادله‌ی سازگاری

$\varphi = \frac{TL}{GJ}$ $\qquad \frac{TL}{GJ}$

گشتاور در مقطع بین C و A برابر با T_A است. بین C تا B برابر ...

$$\frac{T_A \cdot a}{G \cdot J} + \frac{(T_A - T)\cdot b}{GJ} = 0$$

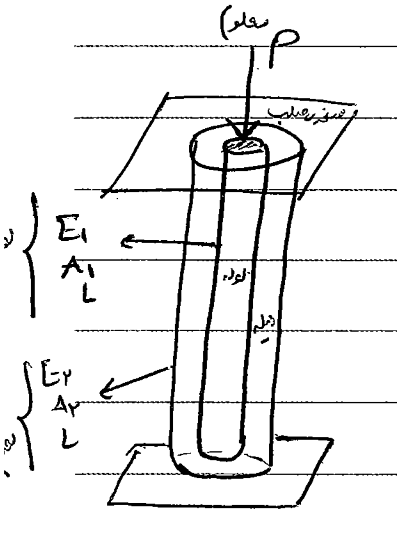
معادله‌ی یک مجهولی (T_A مجهول است) (T معلوم است).

$$T_A = T\frac{b}{L}$$

$$T_B = T\frac{a}{L}$$

گشتاور به هر تکیه‌گاهی که نزدیکتر باشد سهم آن تکیه‌گاه از گشتاور وارده بیشتر می‌شود.

مثال : برای میله‌ی داده شده :



معادله‌ی تعادل : $P_1 + P_2 = P$

معادله‌ی سازگاری : $\delta_1 = \delta_2$

تغییر طول

سختی محوری

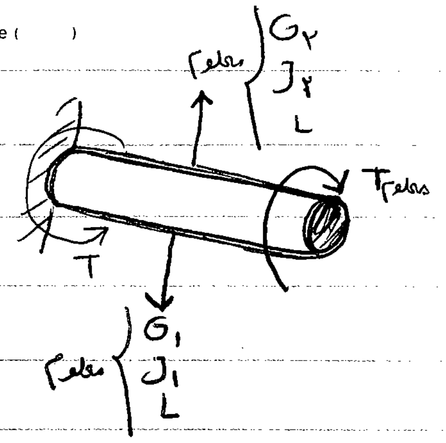
$$P_1 = P\frac{E_1 \cdot A_1}{\Sigma EA}$$

$$P_2 = P\frac{E_2 \cdot A_2}{\Sigma EA}$$

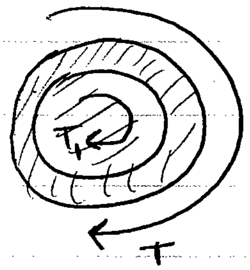
حال می‌خواهیم این میله و لوله را با هم بپیچانیم (یعنی میله و لوله با هم درگیر باشند) مثل شکل صفحه بعد.

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )



مقطع مرکب است یعنی میله و لوله با هم سِت هستند (روی هم سوار هستند) فرض کنیم تحت پیچش قرار گیرد.



معادله‌ی تعادل : $\underbrace{T_1 + T_2 = \overset{\text{معلوم}}{T}}$

۱ معادله دو مجهول پس معادله‌ی سازگاری می‌خواهد،

معادله‌ی سازگاری : $\varphi_1 = \varphi_2$

$$\frac{T_1 L}{G_1 J_1} = \frac{T_2 L}{G_2 J_2} \Longrightarrow$$ از این رابطه T_1 برحسب T_2 بدست می‌آید یعنی

درصد از T سهم T_1 است،

و اگر T_1 را در معادله‌ی تعادل قرار دهیم از آن T_2 بدست می‌آید

$$\begin{cases} T_1 = T\dfrac{G_1 J_1}{\sum GJ} \\ T_2 = T\dfrac{G_2 J_2}{\sum GJ} \end{cases} \Longrightarrow \frac{T_1}{T_2} = \frac{G_1 J_1}{G_2 J_2}$$

صلبیت پیچشی

نکته : $\sigma = ?$ $\varepsilon = ?$ ← طراحی (بهینه)

تحلیل ← معین ← استاتیک ← معادله‌ی تعادل

تحلیل ← نامعین ← مقاومت ← معادله‌ی سازگاری

تحلیل
تعیین شده‌ها
[illegible]

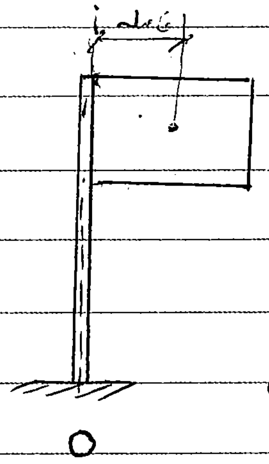
بارگذاری
تعیین نشده‌های خارجی

$$\begin{cases} (\tau_1)_{max} = \dfrac{T_1 r_1}{J_1} \le \tau_{\text{مجاز}} \qquad J_1 \Rightarrow \dfrac{\pi r^4}{2} \\ (\tau_2)_{max} = \dfrac{T_2 r_2}{J_2} \le \tau_{\text{مجاز}} \qquad J_2 = \dfrac{\pi}{2}(R^4 - r^4) \end{cases}$$

تنش — شعاع میله — شعاع خارجی

نکته: هر مسئله‌ی نامعین را اول باید نامعینی‌اش را از بین ببریم یعنی معادله‌ی سازگاری را می‌خواهیم

سؤال امتحان ۳ یک تابلوی تبلیغاتی:



فشار باد داده شده است $\frac{N}{mm^2}$ یا $\frac{N}{km^2}$

مساحت تابلو × فشار باد = نیرو ← این نیرو باعث گشتاور پیچشی می‌شود.

این نیرو همان نیرو هاست در سؤال تابلو وارد می‌شود.

فاصله × نیرو = گشتاور پیچشی

طول محور لوله

استاتیک: مساحت تابلو × فشار باد = F نیرو

$T = F \times e$ گشتاور

فاصله نیرو

اگر جدار نازک نبود

$$\tau_{max} = \frac{TR}{\frac{\pi}{2}(R^4 - r^4)} \leq \tau_{مجاز}$$

$$\varphi = \frac{TL}{G\frac{\pi}{}} \leq \varphi_{مجاز}$$

تبدیل درجه به رادیان

$$3^\circ = \frac{\pi}{180} \times 3$$

**

در حالت تابلو دیگر از زاویه سی‌سیت پیچش باید یا پیچید یعنی آن φ مجاز را به ما داده

نکته: لوله‌ها کلاً دو تا مجهول دارند R و r و یا t و r_{Ave}

تمام مسائل کدام یکی از ۴ حالت زیر است:

① یک معادله یک مجهول ⟨ $r_{Ave} = ?$ و t معلوم / $t = ?$ $r_{Ave} =$ معلوم — در ح کدام

② دو معادله دو مجهول $t = ?$ و $r_{Ave} = ?$

$\tau =$ مقدار = فرمول — ح از τ مجاز بیشتر نشود

$\phi =$ مقدار = فرمول — ϕ از ϕ مجاز بیشتر نشود

۲ معادله

③ یک معادله دو مجهول ⟸ بی‌نهایت جواب دارد (در امتحان می‌آید)

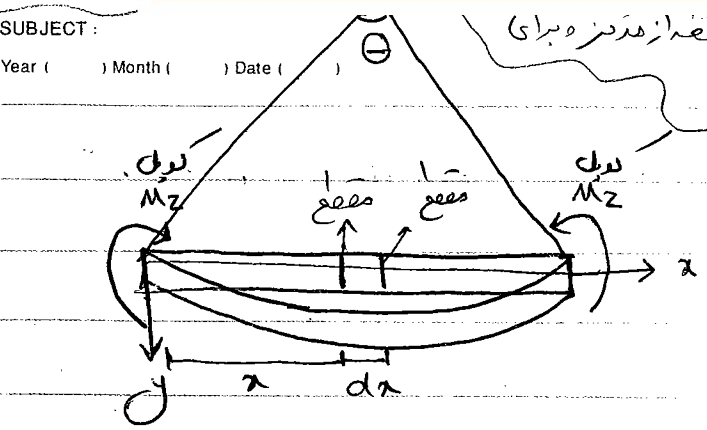
④ دو معادله یک مجهول ⟸ $r_{Ave} =$ معلوم — دو جواب بدست می‌آید که آن که بزرگتر است را انتخاب می‌کنیم ولی اگر جدار نازک باشد ۲ تا t بدست می‌آید و یا ۲ تا r_{Ave} بدست می‌آید که ما بزرگتری را باید در اینجا انتخاب کنیم.

ولی اگر شعاع خارجی ها بدست می‌آید ما باید کوچکتره را انتخاب کنیم. یعنی شعاع داخلی را اگر بخواهیم حساب کنیم باید شعاع داخلی کوچکتر را انتخاب کنیم

نکته: در بحث خمش ... مقدار است

اما در بحث پیچش برای مقاطع مدور بیشترین تنش در دورترین نقطه از مرکز و برای مقاطع مستطیلی در نزدیکترین نقطه به مرکز (برشی) اتفاق می افتد

SUBJECT :
Year ( ) Month ( ) Date ( )



فصل ۶: خمش

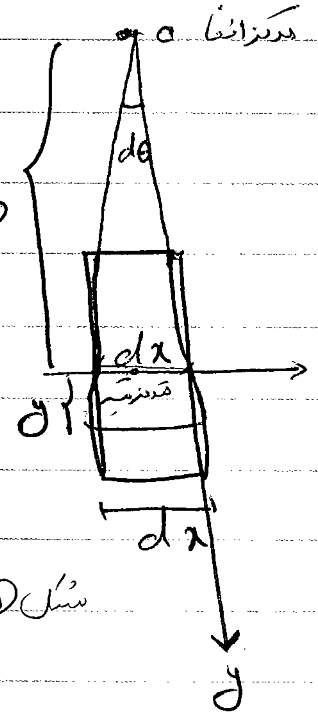
وقتی تیر تغییر شکل می دهد انحنا پیدا می کند

در مرکز انحنا همدیگر را قطع می کنند

برای پیدا کردن مرکز انحنا به فاصله x

یک مقطع می زنیم و مقطع دیگر به فاصله dx می زنیم این دو مقطع را امتداد می دهیم

شعاع انحنا
ρ = فاصله مرکز انحنا تا مرکز تیر



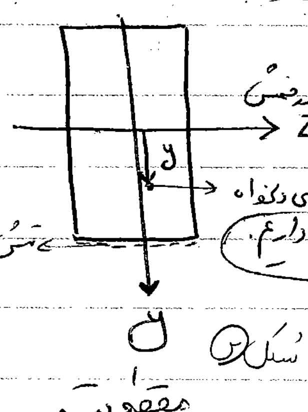
$\Rightarrow$

بعد از تغییر شکل طول در بالا از dx کمتر است و در پایین طول از dx بیشتر است و در واقع فقط وسط dx است.

طبق شکل: $dx = \rho d\theta$

قبل از لنگر (شکل تیر خودکار ابی)
بعد از لنگر (شکل تیر خودکار قرمز)

مقطع تیر است (طول تیر نیست) که در این جا محور z دیده می شود: (برشی از طول تیر) با توجه به شکل ①



y زیر تار خنثی + است
یعنی زیر تار خنثی افزایش طول داریم.
یعنی کشش است

تنش دارای جا max است

$$\boxed{\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx}} \quad ①$$

یک نقطه ی دلخواه دارای مقطع به فاصله y از محور

y ها در نظر می گیریم و هدف بدست آوردن تنش در این نقطه ی دلخواه است.

$\sigma = E\varepsilon$ (تغییر طول نسبی)

برای پیدا کردن تنش دراین جا از کرنش به دلیل ثابت می رسیم طبق قانون هوک.

خودم

نکته: زیر تار خنثی ⟵ $y>0$ ⟵ افزایش طول ⟵ کشش ⟵ کشیده شدن و ترک خوردن
بالای تار خنثی ⟵ $y<0$ ⟵ کاهش طول ⟵ فشار ⟵ خطر کمانش خوردن

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

طول اولیه تار $= dx = \rho\, d\theta$

طول ثانویه $= (\rho + y)\, d\theta = (1 + \frac{y}{\rho})\, \rho\, d\theta = dx + \frac{y}{\rho}\, dx$

تغییر طول $: \delta = \frac{y}{\rho}\, dx$

تغییر طول نسبی $\varepsilon = \frac{\delta}{dx} = \frac{y}{\rho}$

نقطه‌ای که خواهیم در موردش بحث کنیم

فاصله عمودی نقطه دلخواه از تار خنثی

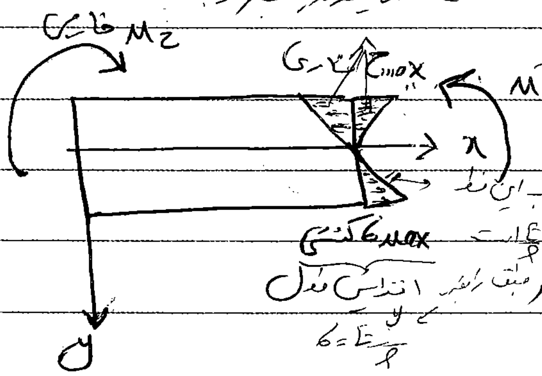
$\sigma = E\varepsilon = E\frac{y}{\rho}$ پس: ① $\boxed{\varepsilon = \frac{y}{\rho}}$ و $\boxed{\sigma = E\frac{y}{\rho}}$ ②

به سادگی برای مسائل بدست می‌آید

علامت ε به y بستگی دارد (چون ρ همیشه + است) [زیر تار خنثی $y > 0 \Rightarrow \varepsilon > 0$ و برعکس]

در فرمول ② y و ε باهم به صورت خطی ارتباط دارند و (σ, ε) باهم رابطه‌ی خطی دارند

حالت بارگذاری مثبت (به هر دو صورت نشان می‌دهند)



(لنگر داخلی ناشی از تنش است) پس باید تنش وجود داشته باشد

برآیند نیروی کششی پایین و برآیند نیروی فشاری بالا باهم یک لنگر ایجاد می‌کنند که همان M داخلی است

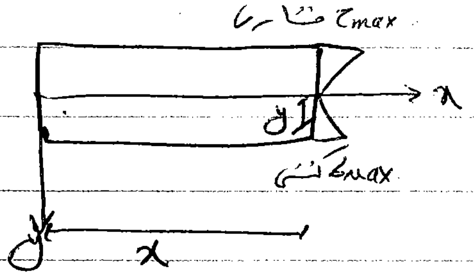
$\sigma = E\frac{y}{\rho}$

(مقدار نیرویی که به سطح کششی وارد می‌شود باید با مقدار نیرویی که به سطح فشاری وارد می‌شود برابر باشد تا تعادل داشته باشد)

نکته: اگر شکل متقارن باشد تار خنثی از وسط شکل عبور می‌کند ولی اگر نامتقارن باشد باید مرکز سطح را بدست آوریم (مرکز)

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )



از معادلات تعادل حل می‌کنیم.

اولین معادله تعادل: $\Sigma F_x = 0 \Rightarrow$ برآیند نیروهای خارجی در راستای x باید با برآیند نیروی داخلی در راستای x برابر شود

نیروی خارجی که نداریم پس برآیند صفر است

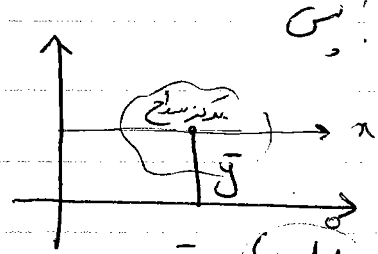
و برآیند نیروهای داخلی هم که $\int \sigma \, dA$ می‌شود

$$\Rightarrow 0 = \int_A \overbrace{\sigma \, dA}^{نیرو} = \int_A \frac{Ey}{\rho} dA = \frac{E}{\rho}\boxed{\int y \, dA = 0} \quad (4)$$

یعنی تار خنثی از مرکز سطح عبور می‌کند

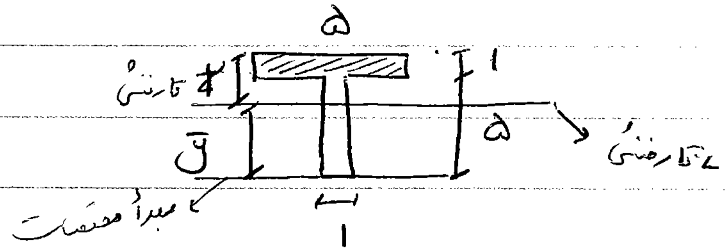
پس: $\boxed{\int y \, dA = 0}$ گشتاور اول سطح نسبت به محور x ها صفر است

یعنی مرکز سطح روی محور x ها قرار دارد.



$$\bar{y} = \frac{\int y \, dA}{A} = 0$$

مثلاً: برای شکل زیر



$$\bar{y} = \frac{(5\times5.5)+(5\times2.5)}{10} = 4\,cm$$

دومین معادله تعادل $\Sigma M_z = 0 \Rightarrow M_z = \int_A \underbrace{\underbrace{y}_{فاصله} \times \underbrace{\sigma \, dA}_{نیرو}}_{لنگر} = \int_A y\left(E\frac{y}{\rho}\right) dA =$

(با توجه به تار خنثی) گشتاور دوم سطح نسبت به محوری که از مرکز سطح می‌گذرد

$$\Rightarrow \boxed{M_z = \frac{E}{\rho}\underbrace{\int_A y^2 \, dA}_{I_z = \text{ممان اینرسی}}} \quad (5) \quad \text{یا} \quad \boxed{M_z = \frac{EI_z}{\rho}} \quad (5) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{\rho} = \frac{M}{\underbrace{EI}_{\text{صلبیت خمشی}}}} \quad (6)$$

SUBJECT :

Year (　　) Month (　　) Date (　　)

فاصله نقطه ی مورد نظر از محور z ها (محور خمشی)

③ , ④ ⟹ $\boxed{\sigma = \frac{M_z y}{I_z}}$ ⑦　　　③ : $\sigma = E\frac{y}{\rho}$

تنش در هر نقطه ی دلخواه ناشی از خمشی　　　④ : $\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$

مهم‌ترین فرمول (که فرمول شماره ی 3 کاربرد ندارد چون ρ)

ممان اینرسی نسبت به محور خمشی می‌خواهد

تنش در هر نقطه ی دلخواه ناشی از ~~پیچش~~ پیچشی　$\tau = \frac{T\rho}{J}$

فاصله ی نقطه ی مورد نظر از مرکز (محور پیچشی)

همان ρ_{max} است　$\tau_{max} = \frac{T_{max} \times r}{J}$

ممان اینرسی نسبت به محور z ها (ممان اینرسی قطبی) (محور پیچشی)

$J = \int \rho^2 dA$

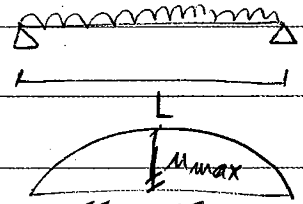
همان y_{max} است

$\sigma_{max} = \frac{M_{max} \cdot c}{I} \le \sigma_{مجاز}$

این را min قرار دهیم

حالا M_{max} را پیدا کنیم ؟؟

مثلاً :



$M_{max} = \frac{qL^2}{8}$

** M_{max} را باید با رسم دیاگرام لنگر بدست آوریم **

صلبیت محوری EA ⟹ $\delta = \frac{PL}{EA}$　　　یادآوری :

صلبیت برشی GA

** آنچه که در این فرمول ها

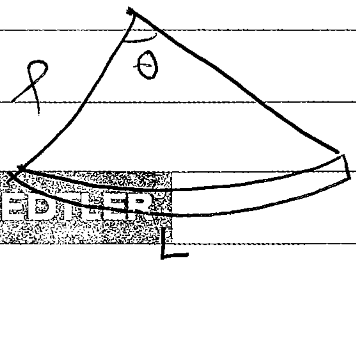
صلبیت پیچشی GJ ⟹ $\varphi = \frac{TL}{GJ}$　　مهم است صلبیت هستی آن هاست.

اگر مقطع را بکشیم یا فشار دهیم یا برش بزنیم A (مساحت) مهم است

صلبیت ~~پیچشی~~ خمشی EI ⟹ $\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$

ولی اگر مقطع را بپیچیم J مهم است

و اگر خم شود I مهم است. **



از مقطعی که می‌خواهد در برابر خمشی مقاوم شود باید I را زیاد کنیم

که در این صورت ρ زیاد شود هر چقدر I را زیاد کنیم تنش کمتری شود.

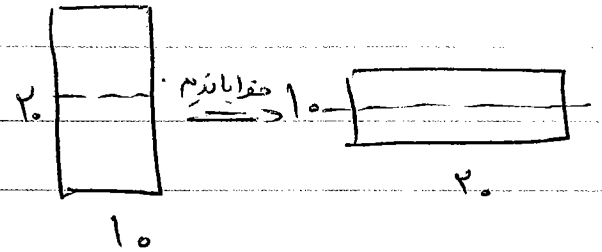
$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$　$\sigma = \frac{Mc}{I}$

(هر چه قدر ρ بیشتر باشد یعنی کمتر خم شده است)

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

مثلاً تیر چوبی با ابعاد ۱۰×۲۰ داریم می‌خواهیم آن را بخوابانیم.



$$I=\frac{bh^3}{12}=\frac{10(20)^3}{12} > I=\frac{20\times(10)^3}{12} \Longrightarrow$$

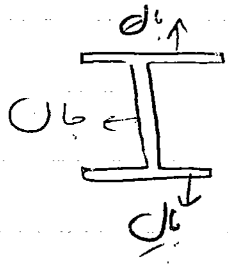
هرچه I بزرگتر باشد σ کمتر می‌شود و مقاوم‌تر می‌شود.

$$I=\int y^2\,dA$$

فاصله از محور خنثی

در خمش همیشه باید I را زیاد کنیم یعنی y را زیاد کنیم مثل:

در تیر I شکل:



~~مثل اینکه می‌توانیم جان را نازک می‌کنیم و~~

زیاد جان را نازک‌تر می‌کنیم و ارتفاع آن را هم افزایش می‌دهیم

نکته: به نسبت $\frac{I}{c}$، S هم گفته می‌شود که مدول مقطع (اساس مقطع) نام دارد.

$$\frac{I}{c}=S \quad (cm^3 - mm^3)$$

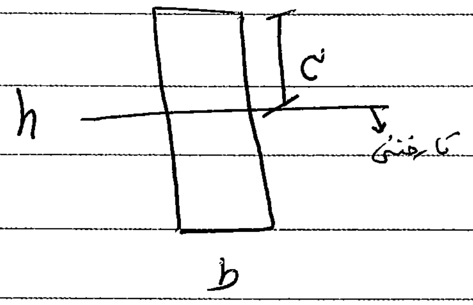
مدول مقطع (اساس مقطع)

$$\boxed{\sigma_{max}=\frac{M_{max}\cdot c}{I}=\frac{M_{max}}{S}\le\sigma_{\text{مجاز}}}$$

(۸) در واقع فرمول کنترلی است.

SUBJECT :

Year (　　) Month (　　) Date (　　)



$$S = \frac{I}{c} = \frac{\frac{bh^3}{12}}{\frac{h}{2}} = \frac{bh^2}{6}$$ حفظ شود

کنترل: $\sigma_{max\ \text{موجود}} = \frac{M_{max\ \text{موجود}} \times c}{I_{\text{موجود}}} = \frac{M_{max}}{S} \leq \sigma_{\text{مجاز}}$

اگر شکل، متقارن بود باید σ تنش و σ مجاز را با هم مقایسه کنیم و نسبت بگیریم.

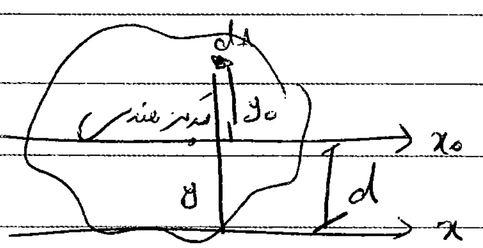
ظرفیت باربری: $M_{\text{مجاز}}$ (حداکثر) (به سمت پایین) $= \sigma_{\text{مجاز}} \times \frac{I_{\text{موجود}}}{c} = \sigma_{\text{مجاز}} \times S_{\text{موجود}}$

در حقیقت برای طراحی ما I را می‌خواهیم، اما اگر I را می‌خواستیم آن گاه c هم مجهول بود پس در این جا در طراحی ما S را می‌خواهیم.

طراحی: $S_{\text{لازم}}$ (حداقل) (به سمت بالا) $= \frac{M_{max\ \text{موجود}}}{\sigma_{\text{مجاز}}}$

مقاطع ساده، مثل مستطیل به $I = \frac{bh^3}{12}$ و $M_{max} = \frac{qL^2}{8}$ ، $S = \frac{bh^2}{6}$ است.

اما در مقاطع مرکب I را بیابید.



$I_{x_0} =$ معلوم $\qquad I_x =$ مجهول

ممان اینرسی نسبت به سطح

$$\boxed{I_x = I_{x_0} + Ad^2}$$

اثبات:

ممان استاتیک نسبت به سطح صفر است

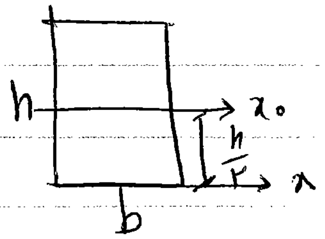
$$I_x = \int y^2 dA = \int (y_0 + d)^2 dA = \underbrace{\int y_0^2 dA}_{I_{x_0}} + \underbrace{d^2 \int dA}_{Ad^2} + \cancel{2d \int y_0 dA}$$

STAEDTLER

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

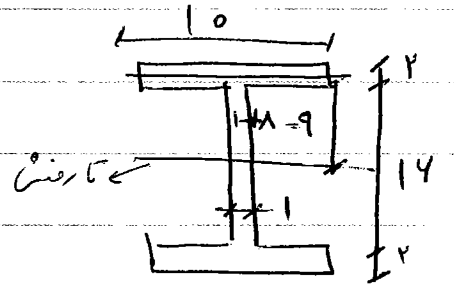
مثال:



$$I_x = \frac{bh^3}{12} + \overbrace{(bh)}^{A}\overbrace{\left(\frac{h}{2}\right)^2}^{d^2} = \frac{bh^3}{3}$$

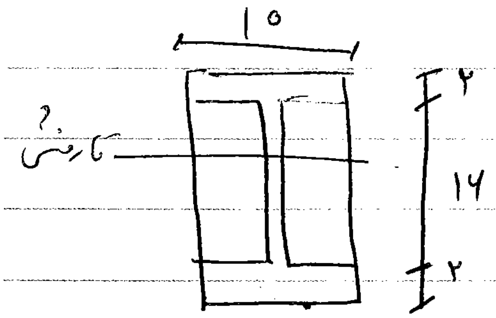
(دایره به درد پیچش می‌خورد اما مستطیل به درد خمش می‌خورد)

مثال:

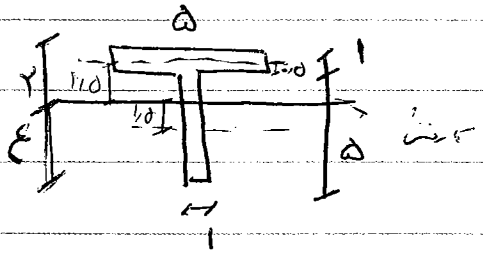


$$I_{\text{کل شکل}} = I_{\text{جان}} + 2I_{\text{بال}}$$

$$\left[\frac{1(14)^3}{12}\right] + 2\left[\frac{10(2)^3}{12} + (10\times 2)(9)^2\right]$$



$$I = \frac{10(20)^3}{12} - 2\left[\frac{4/5\,(14)^3}{12}\right] =$$

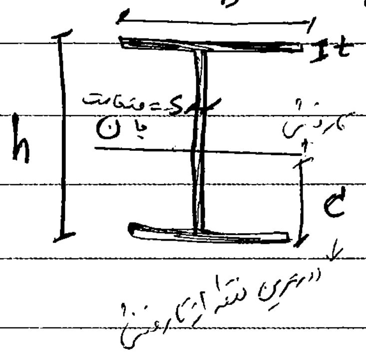


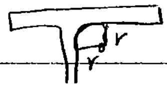
$$I = I_{\text{بال}} + I_{\text{جان}}$$

$$\left[\frac{5(2)^3}{12} + \underbrace{5(1.5)^2}_{Ad^2}\right] + \left[\frac{1(5)^3}{12} + 5(1.5)^2\right]$$

SUBJECT :

Year (   ) Month (   ) Date (   )





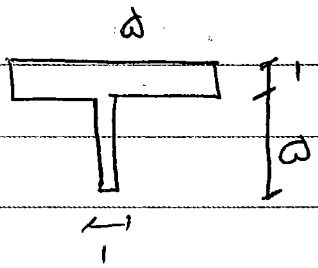
تیرآهن

ارتفاع تیرآهن = نمره‌ها

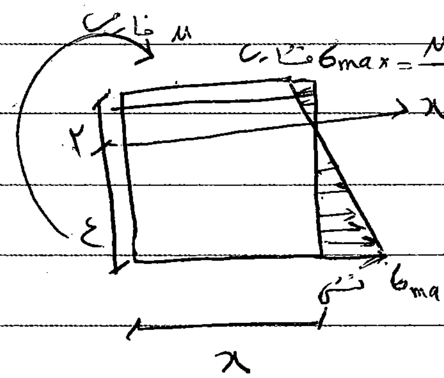
سطح مقطع — ممان اینرسی — اساس مقطع

IPE	h	b	t	s	r	A	G	I (X)	S (X)		(y)
80											
100											
120											
⋮											
600											

بهترین مقطع ، مقطع پروفیل‌های استاندارد (کارخانه‌ای)



مقطع نازک



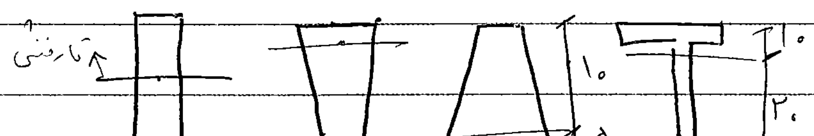
فشاری $\sigma_{max} = \frac{M \times 2}{I} = 30 \le \sigma$ مثلاً ۳۵ مجاز

کششی $\sigma_{max} = \frac{M \times 4}{I} = 60 \le \sigma$ مثلاً مجاز

سازه نامتقارن

مثال: مساحت‌ها مساوی [است] اگر

برای چدن کدام مناسب است.



چدن فشار را بهتر تحمل می‌کند

الف — ب — ج ✓ — د

برای متقارن‌ها مناسب است.

اگر کشش باشد (ج) درست است

ولی اگر فشار باشد ب و د درست است

STAEDTLER

SUBJECT :

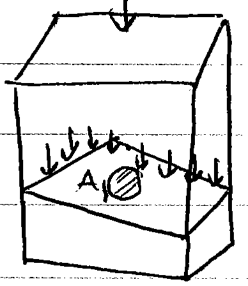
Year ( ) Month ( ) Date ( )

نکته ۱: اگر عضوی تحت کشش باشد (منظور تحت نیروی محوری باشد) و توزیع تنش در کل سطح A

باشد و ما بخواهیم یک بخش از این سطح مثلاً سطح A_1 چقدر نیرو تحمل می‌کند

(P نیروی محوری = فشاری)

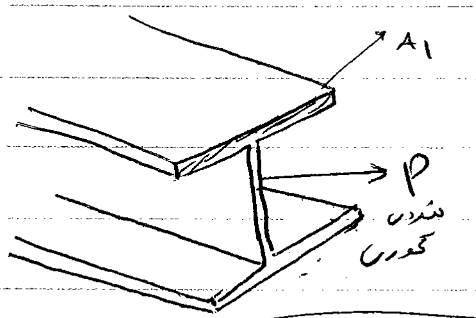
متمرکز نیست، برآیند نیروهاست



با فرض این که تنش یکنواخت باشد (یعنی تنش ثابت است از استدلال بیرون می‌آید)

نیرو به نسبت مساحت توزیع برای یک بخش بدست می‌آید

سهم A_1 از کل نیروی محوری برابر است با:



$$P_1=\int_{A_1}\sigma\, dA=\frac{P}{A}\underbrace{\int_{A_1}dA}_{A_1}=\boxed{P\frac{A_1}{A}}$$

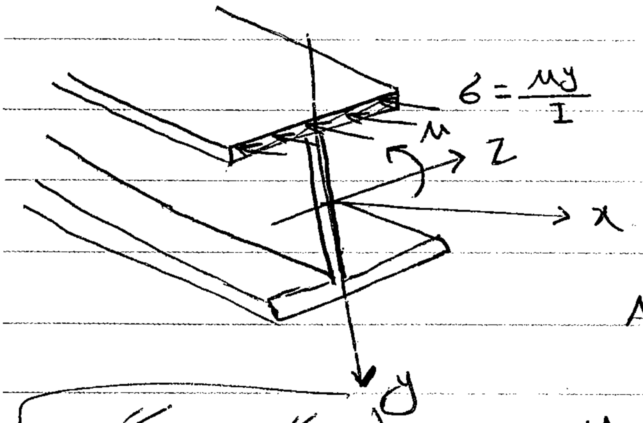
نتیجه‌ی مهم

می‌خواهیم ببینیم P_1 چند درصد P است

سهم نیروی ناشی از فشار

نکته‌ی ۲:

چقدر از لنگر را سطح A_1 تحمل می‌کند؟



$$M_1=\int_{A_1}y\,\sigma\, dA=\int_{A_1}y\left(\frac{My}{I}\right)dA=$$

$$=\frac{M}{I}\underbrace{\int_{A_1}y^2dA}_{I_1}=\boxed{M\frac{I_1}{I}}$$

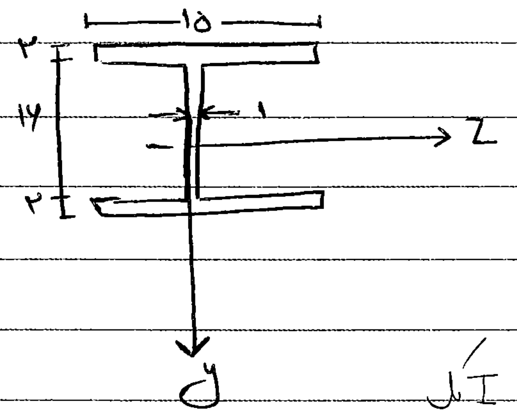
نتیجه‌ی مهم

سهم لنگر ناشی از لنگر

اگر عضوی تحت خمش قرار بگیرد و بخشی از آن (مثلاً سطح A_1) چند درصد لنگر را تحمل می‌کند به نسبت ممان اینرسی است ولی برای نیرو به نسبت مساحت است.

SUBJECT :
Year (　　) Month (　　) Date (　　)

مثال برای نکته ی ۲: تیر آهن



سؤال: چند درصد لنگر را بال و چند درصد را جان تحمل می کنند؟

وقتی می گوییم چند درصد یعنی نسبت $\frac{I_1}{I}$ را می خواهیم و M را هم نداریم اشکال ندارد

I کل را باید با جمع ۳ مستطیل به دست آوریم

$$I_{کل} = I_{جان} + 2 I_{بال}$$

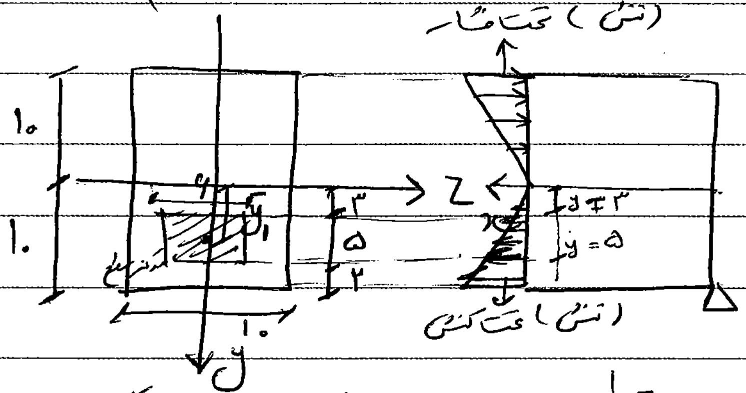
چند درصد را جان تحمل می کند $= \frac{I_{جان}}{I_{کل}}$

هر چه مساحت دورتر از تار خنثی باشد تأثیرش بیشتر است

چند درصد را بال ها تحمل می کنند $= \frac{2 I_{بال}}{I_{کل}}$

نکته ی ۳:

شکل (الف)



وقتی تحت لنگر قرار است نیرویی به بال وارد شود چقدر است؟

$$\sigma = \frac{My}{I}$$

کشش در پایین بیشتر است.

چون نکته ی ۳ با نکته ی ۲ ...

مقطع (برش زدیم = مقطع سمت راست را گرفتیم)

(در این جا نیرویی که در اثر لنگر ایجاد می شود)

بهترین روش ← روش اول

سهم نیروی ناشی از لنگر — نیرویی که به مقطع وارد می شود

$$F_1 = \int_{A_1} \sigma \, dA = \int_{A_1} \left(\frac{My}{I}\right) dA = \frac{M}{I} \underbrace{\int_{A_1} y \, dA}_{Q} = \frac{MQ}{I}$$

نیرویی که به سطح ها وارد می شود — ناشی از لنگر است یعنی در اثر لنگر به وجود آمده

Q = ممان استاتیک — ممان استاتیک مقطع نسبت به تار خنثی

I: ممان اینرسی کل مقطع نسبت به تار خنثی

ممان استاتیک سطح های جدا شده نسبت به تار خنثی

اگر در مقطعی دیدن و گفتن تحت لنگر است چه نیرویی به آن مقطع وارد می شود، باید از فرمول $\frac{MQ}{I}$ استفاده شود.

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

روش دیگر

$\bar{y}_1$: فاصله مرکز سطح هاشور خورده از تار خنثی

$$F_1 = \underbrace{\frac{M}{I}(\bar{y}_1)}\underbrace{A_1}_{Q_1} = \underbrace{\left(\frac{M\bar{y}_1}{I}\right)}\cdot A_1$$

تنش در مرکز سطح هاشور خورده

تنش مرکز سطح هاشور خورده

این تنش در یک نقطه است در یک مقطع

با توجه به شکل الف $\bar{y}_1$ در شکل نشان داده شده

(مثلاً برای مثلث این مورد) تنش ~~برای~~ مرکز سطح برای این مقطع به مستطیل شکل است نمی شود

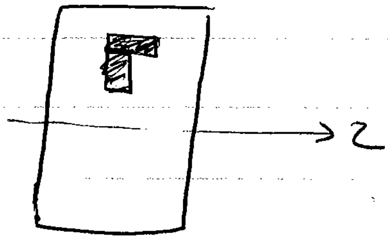
روش سوم: $F_1 = \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\cdot A_1$

= تنش ~~مرکز~~ مرکز سطح [تنش تنش در بالای مقطع (σ_1)

و تنش در پایین مقطع (σ_2)

را بدست می آوریم و تقسیم بر ۲ می کنیم

مثال:



Q_s سطح هاشور خورده

برابر است با جمع Q در مستطیل.

مثال: M و I و ابعاد مقطع و E و ν = معلومات مسئله

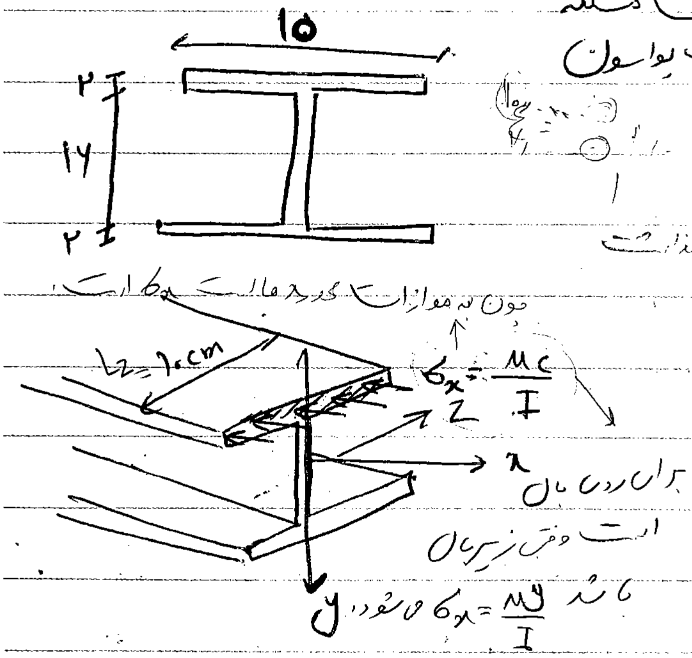
مدول الاستیسیته ی مثلاً فولاد — ضریب پواسون

الف) عرض بال فوقانی = ؟ مجهول — بعد از اعمال لنگر

یعنی باید δ_z را بدست آوریم

تغییر طول در جهت z

چون فشاری است باید منفی بگذاریم — $\frac{Mc}{I}$



$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\cancel{\sigma_z} - \nu(\sigma_x + \cancel{\sigma_y})\right] = +$$

جواب + بدست می آید

یعنی انبساط پیدا کرده

$$\delta_z = \varepsilon_z \cdot L_z$$

در این جا 10cm

ب) ضخامت بال فوقانی = ؟

یعنی اول باید δ_y را بدست آوریم

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\cancel{\sigma_y} - \nu(\sigma_x + \cancel{\sigma_z})\right]$$

جواب + است

پس ضخامت بال هم زیاد شد

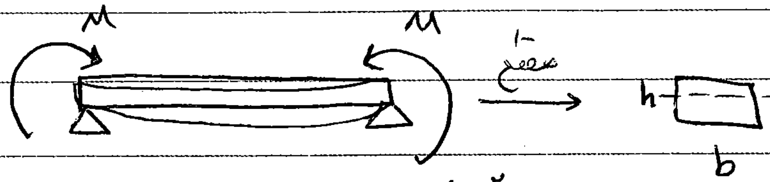
$$\delta_y = \varepsilon_y \times L_y = \varepsilon_y \times 2\,cm$$

$$\sigma_x = -\frac{M\times 9}{I}$$

پس در کل طول بال کم می شود ولی عرض بال و ضخامت زیاد می شود

مثال: تیر چوبی:

حالت اول: کل تیر چوبی



$M_{1\,مجاز} = \sigma_{مجاز\,چوب} \times S_{موجود} = \sigma_{مجاز} \times \frac{bh^2}{6}$

حالت دوم:

دو تیر چوبی مثل هم را روی هم می‌گذاریم (بدون اتصال) (بدون جوش = بدون چسب)
وقتی آن‌ها را خم می‌کنیم روی هم می‌لغزند.

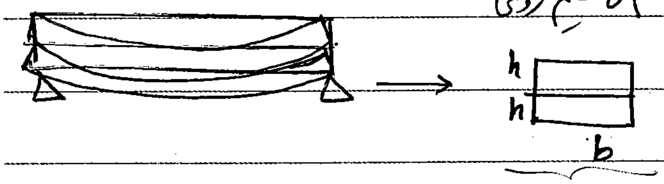
یادآوری:

$\sigma = \frac{Mc}{I} = \frac{M}{S} < \sigma_{مجاز}$

$M_{مجاز} = \sigma_{مجاز} \cdot S_{موجود}$

$S_{لازم} = \frac{M}{\sigma}$

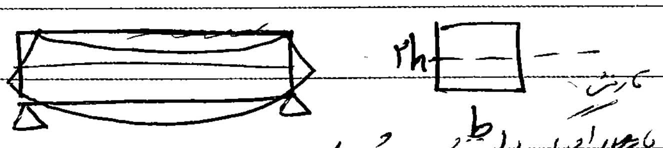
$S_{مستطیل} = \frac{I}{c} = \frac{\frac{bh^3}{12}}{\frac{h}{2}} = \frac{bh^2}{6}$



دو تار خنثی داریم چون شکل مرکب نیست و هر کدام از تیرها جداگانه در پایین افزایش طول و در بالا کاهش طول دارند.

$M = 2M_{مجاز} = 2\sigma_{مجاز} \times \frac{bh^2}{6}$

حالت سوم: دو تیر را آن‌ها را به هم بچسبانیم (در واقع یک تیر داریم):



چون با چسب به هم متصل کردیم
دیگر روی هم نمی‌لغزند یعنی چسب جلوی این کار را گرفته (تنش برشی)

به صرفه‌تر است از حالت قبلی است.

$M_{مجاز} = \sigma_{مجاز} \times S_{موجود} = \sigma_{مجاز} \times \frac{b(2h)^2}{6} = 4M_{1\,مجاز}$

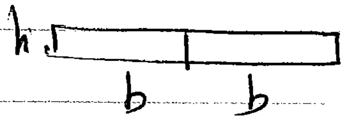
وقتی روی این تیر بار بیاید یک پارچه تغییر شکل می‌دهد (چون در واقع یک تیر است)

** نکته: در خمش ملاک اساس مقطع است (S) و یا I ممان اینرسی است)

SUBJECT :

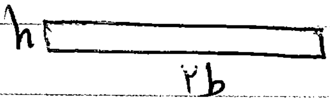
Year ( ) Month ( ) Date ( )

حالت چهارم:



کنار هم هستند (بدون اتصال)

$M_{کل} = ۲ M_{1\,تک}$



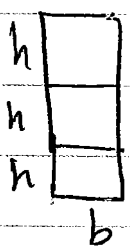
کنار هم جوش کردیم:

$M_{جوش} = \sigma_{جاری} \times S = \sigma_{جاری} \times \frac{(۲b)h^۲}{۶} = ۲M_{1\,تک}$

پس اگر دو تیر کنار هم باشند [چه جوش کنیم چه نکنیم مقاومت خمشی آن ها یکسان است]

ولی اگر روی هم بگذاریم [جوش کنیم (برای مستطیل) ۴ برابر می شود و اگر جوش نکنیم (برای مستطیل) ۲ برابر می شود]

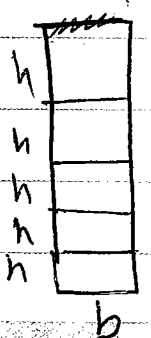
وقتی می گوییم وقتی روی هم بگذاریم جوش کردن مهم است با فرض این که است که بار از بالا به آن وارد می شود (بار ثقل وارد شود) وقتی اگر بار افقی وارد شود جای h و b عوض می شود: $S = \frac{hb^۲}{۶}$



بست کنگوری: سه تیر می خواهیم آن ها را بچسبانیم مقاومت چند برابر حالت است که نچسبانیم

چسباندن $= \underbrace{۹}_{برابر\ تکی} M_1$

نچسباندن $= \underbrace{۳ \times M_1}_{برابر\ تکی}$



بچسبونیم $= ۵M_1$

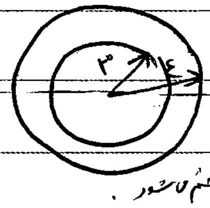
تیر دهم افقی بود.

SUBJECT :

Year (   ) Month (   ) Date (   )

مثال:

لوله‌ی فولادی به شعاع داخلی ۳ و شعاع خارجی ۴ و دارد حول محور رنگ شده خم می‌شود.



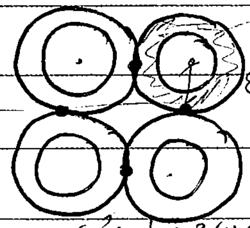
حول این محور خم می‌شود.

آیا ۴ تا از این لوله‌ها را استفاده می‌کنیم

M جایی صفر برابر می‌شود

$$S_1 = \frac{I_1}{c} = \frac{\frac{\pi}{4}(4^4-3^4)}{4}$$

c دورترین نقطه از تار خنثی



$\pi(4^2-3^2)$

شعاع ۴ = فاصله

تار خنثی

چون جوش می‌دهیم با هم واحد شده و یک تار خنثی دارد

الف) اگر این ۴ تا را جوش ندهیم => $4M_1$ جایز

ب) اگر جوش بدهیم => باید I مجموع را حول دایره‌ها بگیریم یعنی باید $\frac{I}{c}$ را حساب کنیم (برای مستطیل فقط هستیم که $\frac{bh^2}{6}$ می‌شود)

برای ۴ تا لوله جوش شده

$$I = 4\left[I_1 + A_1 d^2\right] = 4\left[\frac{\pi}{4}(4^4-3^4) + \pi(4^2-3^2)(4)^2\right]$$

$$S = \frac{I}{c} = \frac{I}{8}$$

$$\boxed{\frac{S}{S_1} = 7.2}$$

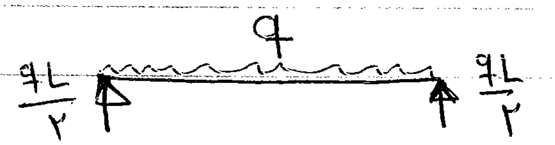
«فصل پنجم» «تنش برشی در تیرها»

در تیرهای تنش برشی باید کنترل شود و در تیرهای تنش خمشی باید کنترل شود
یعنی باید کنترل کنیم تیر جی بزرگ یا نه

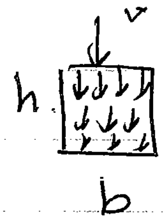
$$\sigma = M\frac{c}{I} \le \sigma_{مجاز}$$

$$\tau = \frac{VQ}{It} < \tau_{مجاز}$$

معمولاً در امتحان فصل ۴ و ۵ با هم می‌آیند؛ هم تنش برشی و هم تنش خمشی کنترل شود.

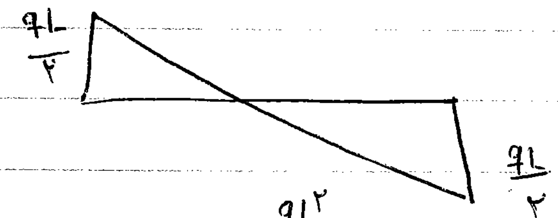


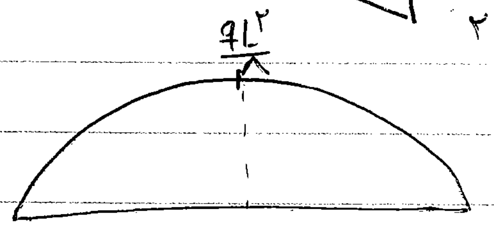
مقطع



$$\tau_{Ave} = \frac{V}{A} \le \tau_{مجاز}$$

اگر توزیع تنش یکنواخت باشد.

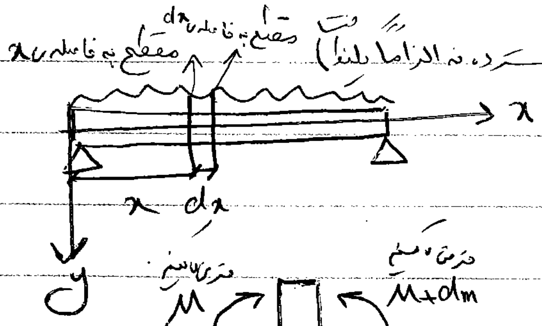


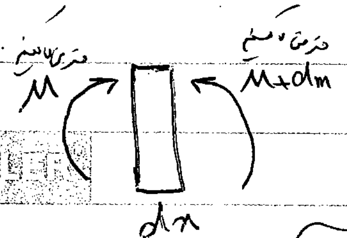


در فصل اول گفتیم $\tau_{Ave} = \frac{V}{A}$ اگر این رابطه

کمتر از τ مجاز باشد مقطعی که تیر گسیخته می‌شود باید $\tau_{max} < \tau_{مجاز}$ باشد.

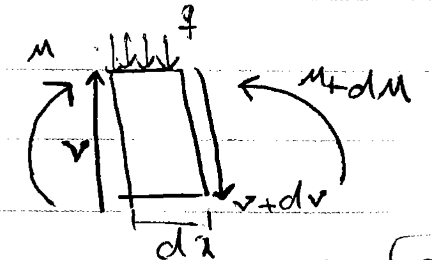
تیر را در نظر می‌گیریم که تحت بار است: (تحت بار گسترده، نه الزاماً یکنواخت)





یادآوری از استاتیک:

$$V = \frac{dM}{dx}$$



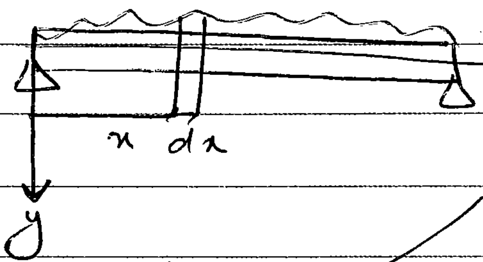
معادلات تعادل: $\sum F_y = 0 \Rightarrow V = q\,dx + V + dV \Rightarrow \boxed{q = -\frac{dV}{dx}}$

$\sum M = 0 \Rightarrow M - V\,dx = q\,dx\left(\frac{dx}{2}\right) + M + dM \Rightarrow \boxed{V = \frac{dM}{dx}}$

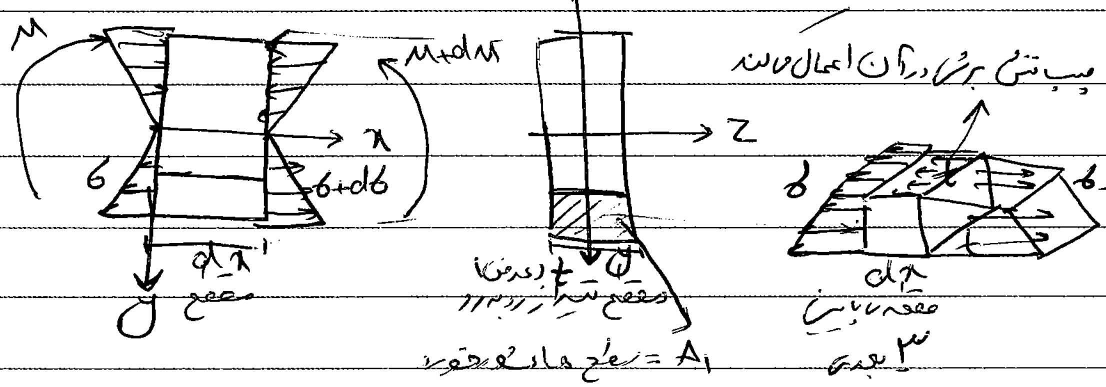
SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

پس: $M=\int V dx \Longleftarrow V=\frac{dM}{dx}$



M باعث تنش نرمال در بالا
و تنش کششی در پایین می‌شود
چون تکیه‌گاه داخلی ناشی از تنش است
پس تنش به وجود می‌آید



(τ) پس تنش برشی در آن اعمال می‌کنند

$$\Sigma F_x=0 \Longrightarrow \underbrace{\int_{A_1}\sigma\, dA}_{\text{نیروی از راست به چپ}} + \tau t\, dx=\int_{A_1}(\sigma+d\sigma)\,dA$$

$$\int_{A_1}\frac{My}{I}dA+\tau t\,dx=\int_{A_1}\frac{(M+dM)y}{I}dA$$

$$\tau t\,dx=\frac{dM}{I}\underbrace{\int_{A_1} y\,dA}_{Q} \Longrightarrow$$

ممان استاتیک مقطع جدا شده نسبت به تار خنثی

(مقطعی که از محیط تیر جدا می‌شود (سطح هاشور خورده))

نیروی برشی (در طول تیر V_{max} را داریم)

$$\Longrightarrow \tau=\underbrace{\frac{dM}{dx}}_{V}\cdot\frac{Q}{It} \Longrightarrow \boxed{\tau=\frac{VQ}{It}}$$

← مهم

مهم‌ترین فرمول تمام مسائل بالا

(فرمول دقیق برشی)

تنش برشی در هر نقطه تیر

ضخامت مقطع مورد نظر

ممان اینرسی مقطع مورد نظر نسبت به تار خنثی

فرمول تقریبی برشی: $\tau=\frac{V}{A}$

SUBJECT
Year (Month (Date ( ) ۲۰

لنگر خمشی در مقطع مورد نظر

تنش قائم در نقطه‌ی مورد نظر (ناشی از M) : σ (برای تنش) $= \frac{My}{I}$

y : فاصله‌ی نقطه‌ی مورد نظر از تار خنثی (خیلی مهم)

I : ممان اینرسی مقطع مورد نظر (I کل مقطع)

$\tau = \frac{VQ}{It}$

V : نیروی برشی در مقطع مورد نظر

Q : ممان استاتیک مقطع جدا شده در نقطه‌ی مورد نظر

t : ضخامت مقطع در نقطه‌ی مورد نظر

τ : تنش برشی در نقطه‌ی مورد نظر [در تیر]

I : ممان اینرسی مقطع مورد نظر

نتیجه: نقطه‌ی مورد نظر، مثلاً نقطه‌ای که حساب می‌شود.

نیرو و لنگر برای مقطع است = در استاتیک باید بدست آوریم

تنش برای نقطه است = در مقاومت مصالح

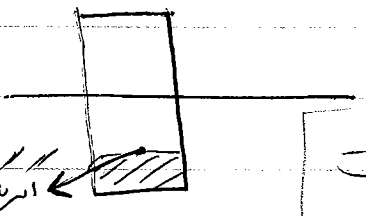
مهم

نکته: طبق فرمول $\tau_{max} = \frac{V \cdot Q_{max}}{I\, t_{min}}$ وقتی Q_{max} و t_{min} باشد بدترین نقطه یعنی بیشترین تنش

برای رسیدن به نقطه باید اول مقطع معلوم شود. پس مقدار M

(چه در خمشی چه در برش ممان اینرسی مقطع مورد نظر را می‌خواهیم)

نکته:

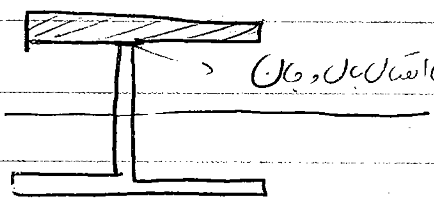


اگر بخواهیم تنش در این نقطه Q می‌شود سطح هاشور خورده

Q_{max} در تار خنثی اتفاق می‌افتد یعنی در تار خنثی τ ماکزیمم است

مثلاً ممان استاتیک بخشی از مقطع با بقیه‌ی مقطع همیشه برابر است.

مثال: تنش برشی را در محل اتصال بال به جان بیابید



محل اتصال بال و جان

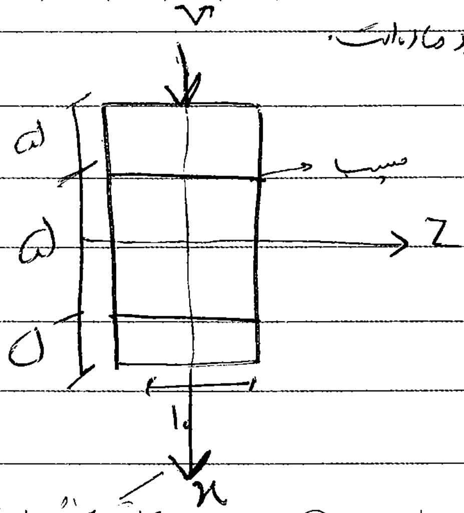
t = ضخامت جان می‌شود

ممان استاتیک کل سطح صفر است.

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

فقط برای چسب نیست برای خود ماده است.



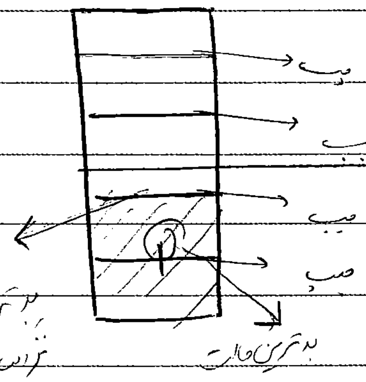
$$\tau = \frac{VQ}{It} \le \tau_{\text{جاز چسب}}$$ چسب = جایی که چسب خورده.

$$\tau = \frac{VQ}{It} \le \tau_{\text{جاز چوب}}$$ چوب = تار خنثی

باید هر دو تا را کنترل کنیم (مثل هم)

در این فرمول V از روی دیاگرام برش بدست می‌آید، t = عرض چسب است، Q = ممان استاتیک بخشی از مقطع است که به تار خنثی با ممان استاتیک بخش مستقیم آن برابر است

هرچه چسب به تار خنثی نزدیک‌تر باشد Q بزرگتر است (وضعیت بحرانی‌تر است).

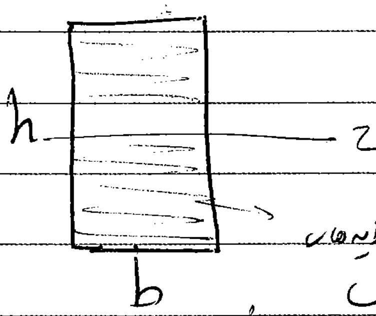


$$\tau = \frac{VQ}{It} \le \tau_{\text{جاز چسب}}$$

کنترل چسب اگر چند لایه بود

باید کدام را کنترل کنیم کدام به تار خنثی نزدیک‌تر است.

اگر تیر چوبی یکپارچه به عرض b و ارتفاع h داشتیم



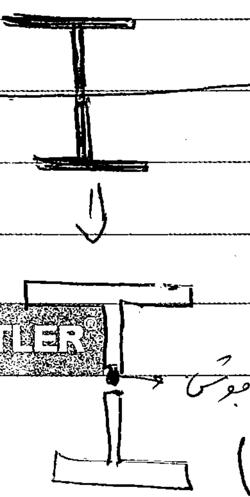
تک تک لایه‌ها ممکن است روی لایه‌ی بالایی یا پایینی بلغزند.

برای تیر چوبی که یکپارچه است فقط V باید $\tau \le \tau_{\text{جاز چوب}}$ باشد.

اما برای تیری که واقعا چسب خورده $\tau \le \tau_{\text{جاز چسب}}$ در بدترین نقطه که چسب خورده (نزدیک‌ترین به تار خنثی) $\tau \le \tau_{\text{جاز چوب}}$ برای مقاطع لایه‌های چوب

اگر تعداد چسب‌ها فرد باشد به تعداد مقطع‌ها زوج شوند آنگاه $\tau_{\text{چوب}} = \tau_{\text{چسب}}$

مثال: یک تیر فولادی را بسازیم (جوش کنیم)



فرض مسئله

ضخامت جان mm

ضخامت جوش mm

mm = ... در فولاد ... نگذاریم

$$\tau = \frac{VQ}{It} \le \tau_{\text{جاز جوش}}$$ t: ضخامت جوش

$$\tau = \frac{VQ}{It} \le \tau_{\text{جاز فولاد}}$$

باید Q مربوط به تار خنثی را بگذاریم (برای کنترل خود ماده)

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date

ممان استاتیک مقطع جدا شده در نقطه‌ی مورد نظر نسبت به تار خنثی

(نیروی برشی در مقطع مورد نظر) تابعی از x است

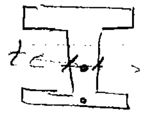
تنش برشی در $\tau = \frac{VQ}{It}$ *

ضخامت مقطع در نقطه‌ی مورد نظر (در مستطیل ضخامت ثابت است و در هر جا b است)

ممان اینرسی مقطع مورد نظر نسبت به تار خنثی

تیر با جیب یا موش

یادآوری: برای ضخامت متغیر به شکل زیر t آن نقطه را داریم



افزایش داریم

افزایش داریم

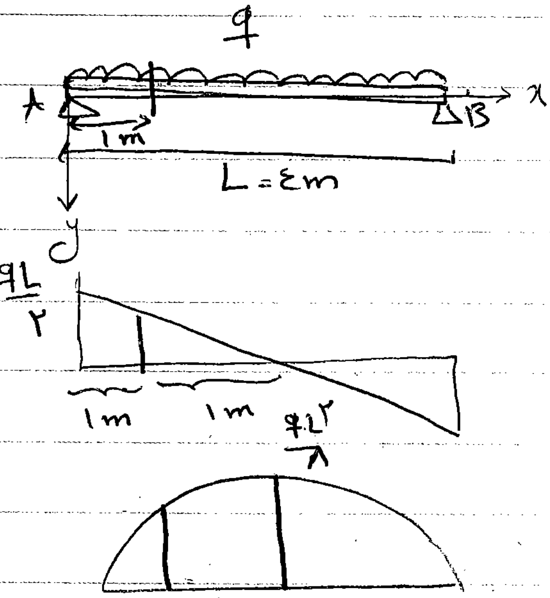
(لنگر خمشی در مقطع مورد نظر) تابعی از x است

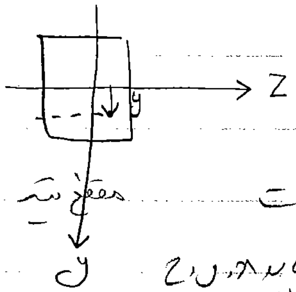
تنش قائم در تیر $\sigma = \frac{My}{I}$ *

فاصله‌ی نقطه‌ی مورد نظر از تار خنثی

ممان اینرسی مقطع مورد نظر نسبت به تار خنثی

مثال: (یعنی تیر را باید خمش و برش با هم مشترک کرد = فصل ۴ و ۵)





منظور از تنش قائم در تیر باید در یک نقطه‌ی مشخص باشد.

نقطه‌ی مشخص دارای مشخصاتی است

که ما باید آن نقطه را پیدا کنیم یعنی باید x و y و z

آن نقطه را بدانیم. این که x آن کجاست

یعنی مقطع (یعنی وقتی گفتند در راستای ۸/ باید در راستای مقطع بزنیم) تکیه‌گاه A

y = فاصله‌ی نقطه‌ی مورد نظر از تار خنثی (یعنی نقطه را باید

در مقطعی که در راستای تکیه‌گاه A زدیم، بدانیم که z آن چه اندازه است و y آن در مقطع تیر مشخص شد)

* { تنش برشی به V ربط دارد که هر جا V بیشتر است (که V_{max} از روی دیاگرام برش بدست می‌آید) به عنوان تنش برشی

* { در مورد σ_{max} باید هم مقطع بحرانی و هم نقطه‌ی بحرانی را پیدا کنیم (M_{max} = از روی دیاگرام خمشی و $y = y_{max}$)

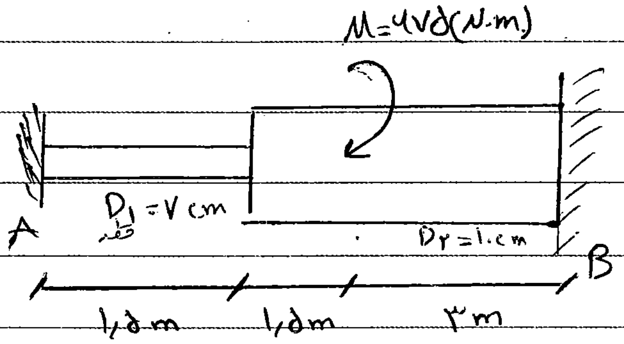
همیشه τ در تار خنثی max است و هرچه از تار خنثی دور شویم بدتر است و بدترین مقطع روی تار خنثی است

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

حل تمرین مقاومت

تمرین ۱) مثال: در شکل مقابل در صورتی که جنس میله ی AB یکنواخت باشد گشتاورهای پیچشی تکیه‌گاهی را در A و B بدست آورید.

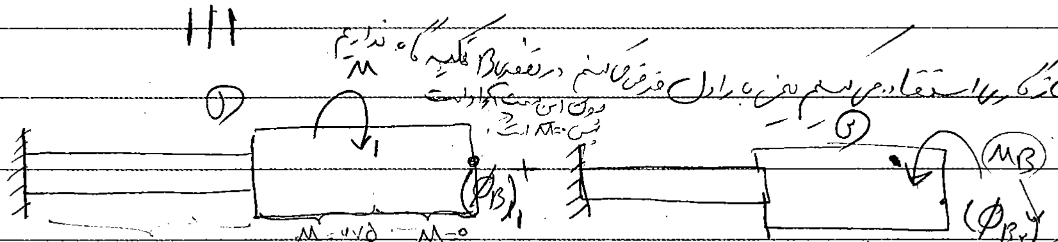


دو مقطع متفاوت داریم (پس نامعین است)

عکس‌العمل‌ها ناشی از M است از جنس پیچشی هستند گشتاور هستند

!!!

از اصل سازگاری استفاده می‌کنیم یعنی با اول فرض می‌کنیم در نقطه B تکیه‌گاه نداریم



$$\phi_{B_1} = \frac{475\times1.5}{G\left(\frac{\pi(0.035)^4}{2}\right)} + \frac{475\times1.5}{G\left(\frac{\pi(0.05)^4}{2}\right)} + 0$$

پس عکس‌العمل در نقطه B

$$\frac{(M_B)(1.5)}{G\left(\frac{\pi(0.035)^4}{2}\right)} + \frac{(M_B)(4.5)}{G\left(\frac{\pi(0.05)^4}{2}\right)}$$

چون می‌دانیم $\phi_B = 0$ است پس در B تکیه‌گاه داریم است پس در دو شکل بالا باید برابر باشد ۱ و ۲ یعنی ϕ_B ها برابر

$$|\phi_{B_1}| = |\phi_{B_2}|$$

$\phi = \frac{TL}{GJ}$ باید از این فرمول استفاده کنیم یعنی باز نویسی کنیم

$J = \frac{\pi R^4}{2}$

در شکل ① ⇐ $T=M$ است (در شکل ① G ثابت است)

در شکل ② ⇐ $T=M_B$ است (در شکل ② G ثابت است)

$|(\phi_B)_1| = |(\phi_B)_2| \longrightarrow M_B = ?$ بدست می‌آید (حساب شود)

و M_A هم وقتی برآیند گشتاورها حول نقطه A بگیریم بدست می‌آید.

$M_A = 475 - M_B =$ بدست آید

اگر در صورت سؤال گفته بود ϕ_D را بدست آورید؟

باید در نقطه D برش بزنیم و تکیه‌گاه در نقطه B را حذف می‌کنیم و به جای آن M_B قرار می‌دهیم

باید از فرمول $\tau_{max} = \frac{TR}{J}$ و نقطه D را در نظر بگیریم (البته اول باید تکیه‌گاه در نقطه B بدست آوریم عکس‌العمل)

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

مثال مهم

پایان‌ترم‌مثال: ستون بتنی به طول $1/2m$ توسط ۴ میله گرد به قطر $19mm$ تقویت شده است

مدول الاستیسیته فولاد

اگر داشته باشیم $\alpha_s = 11/7 \times 10^{-6} \frac{1}{c^\circ}$ و $\alpha_c = 9/9 \times 10^{-6} \frac{1}{c^\circ}$ و $E_s = 200 Gpa$

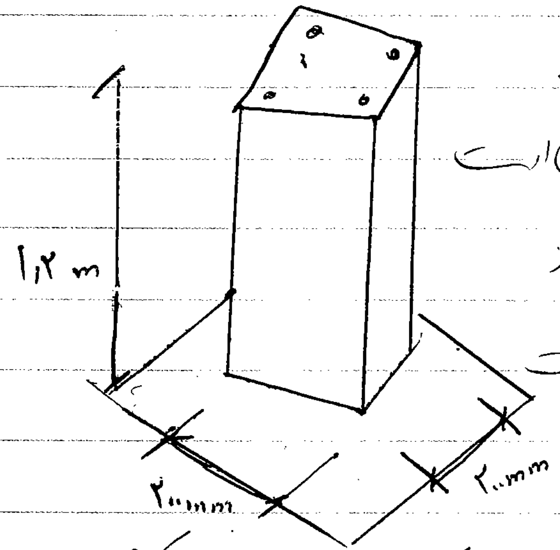
$E_c = 25 Gpa$ ضریب انبساط حرارتی بتن

ضریب انبساط فولاد حرارتی

وقتی ستون را به اندازه‌ی $45^\circ c$ حرارت می‌دهیم تنش را در فولاد و بتن بدست آورید.

تنش ناشی از افزایش حرارت که باعث افزایش طول می‌شود.

$\Delta\theta = 45^\circ$ افزایش حرارت



فولاد و بتن را به طور مجزا در نظر بگیریم طول اولیه هر دو یکسان است

و ΔT اولیه آن‌ها $\Delta L = L.\alpha.\Delta T$ افزایش طول ناشی از افزایش حرارت

هم یکسان و فقط α آن‌ها فرق می‌کند

چون فولاد α بزرگتری دارد افزایش طول آن بیشتر است

ولی در مصالح به طور همگن داخل هم قرار گرفته‌اند

پس شرط سازگاری را باید بنویسیم $\Delta L_{\text{فولاد}} = \Delta L_{\text{بتن}}$

چون میله‌گرد تمایل به افزایش طول بیشتری دارد و بتن تمایل دارد که فولاد را به سمت جلو بکشد (مقاومت می‌کند)

و فولاد تمایل دارد که کش بیاورد (عمل و عکس‌العمل). فولاد فشاری و در بتن کششی است.

تنش در

عامل ایجاد تغییر طول در فولاد یکی افزایش حرارت است و عامل دیگر تغییر طول تنش فشاری ایجاد شده است

تنش فشاری، نیروی فشاری هم ایجاد می‌کند.

نیروی فشاری $= P_s$ (کاهنده $-$)

نیروی کششی $= P_c$ (افزاینده $+$)

$\Delta L_{\text{فولاد}} = \Delta L_{\text{بتن}}$

در راستای قائم به نیروی کششی به بتن وارد می‌شود. و نیروی فشاری که به فولاد وارد می‌شود

ناشی از حرارت

$(L.\alpha_s.\Delta T) - \frac{P_s L}{E_s} = (L.\alpha_c.\Delta T) + \frac{P_c.L}{E_c A_c}$

کاهنده — ناشی از تنش — افزاینده

$\sum F_y = 0 \Rightarrow P_s = P_c = P$ حل می‌کنیم

یک معادله‌ای دو مجهول است

رابطه P_c, P_s را از رابطه (P_s, P_c) که ما

استاتیکی $\sum F_y = 0$ بدست می‌آوریم که مقدار آن P است

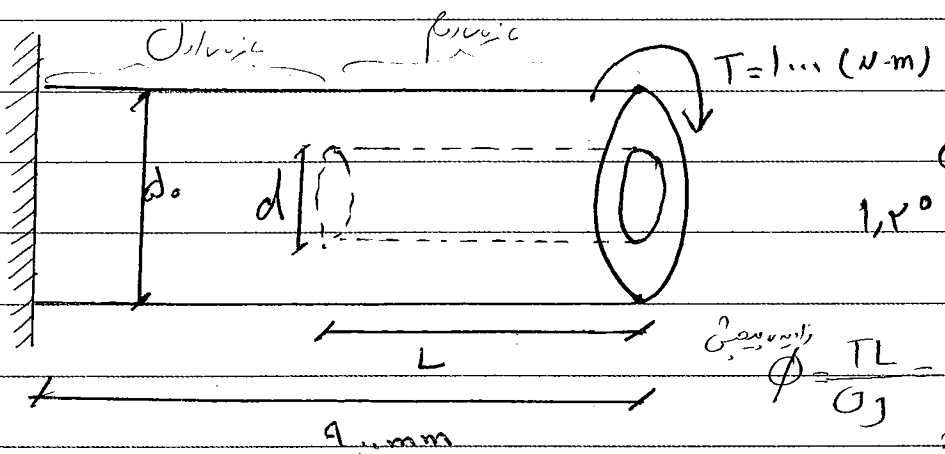
حل:

$\sum F_y = 0 \Rightarrow P_s = P_c = P \Rightarrow P = 14895\ N$

$\sigma_s = \frac{14895}{\pi(19)^2} = 13/13\ MPa$ فشاری

$\sigma_c = \frac{14895}{\pi(20.2^2 - 19^2)} = 383\ MPa$ کششی

مثال: یک محور استوانه‌ای به قطر ۵۰mm و طول ۹۰۰mm مطابق شکل تحت گشتاور پیچشی معادل ۱۰۰۰ N.m قرار دارد. در صورتیکه داشته باشیم $G = 0/84\times10^5\ \frac{N}{mm^2}$ مقدار d و $T = 1000\ N.m$ طول L سوراخ ایجاد شده را چنان بیابید که اولاً تنش برشی حداکثر در محور داده شده از ۵۶MPa تجاوز نکند، و ثانیاً حداکثر زاویه پیچش کل محور از $1/2°$ بیشتر نشود.



زاویه پیچش $\phi = \frac{TL}{GJ}$ = رادیان باید درجه به رادیان تبدیل شود. $x° \frac{\pi}{180}$

$\tau_{max} = 56\ MPa$

میدانیم تنش برشی $\tau = \frac{T\rho}{J}$ در مقطع ما T ثابت است و ρ هم باید تبدیل به R شود (دورترین فاصله) که در این شکل T و R ثابت است پس تنها متغیر J است و به ازای J کمتر τ حداکثر میشود:

τ حداکثر میشود $\tau = \frac{TR}{J}$ ثابت

$\tau_{max} = \frac{1000\times10^3\times25}{\frac{\pi}{2}(25^4 - r^4)} = 56 \longrightarrow r = 18mm$

$\boxed{D = 36mm}$

بیشترین φ در لبه‌ی بازه‌ی طول رخ می‌دهد پس باید مجموع زاویه پیچش در مقطع انتهای را بنویسیم.

مجموع φ در دو بازه

$\phi_{انتهای\ میله} = \sum \frac{TL}{GJ} = \frac{10^6 L}{0/84\times10^5\times\frac{\pi}{2}(25^4 - 18^4)} + \frac{10^6(900 - L)}{0/84\times10^5\times\frac{\pi}{2}(25)^4} = 1/2\times\underbrace{\frac{\pi}{180}}_{تبدیل\ به\ رادیان} \Rightarrow \boxed{L = 488/6\ mm}$

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

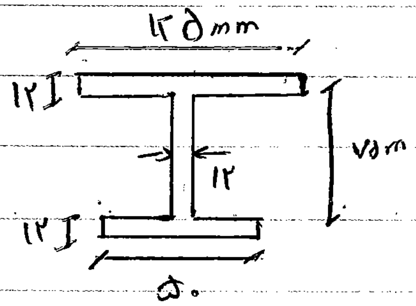
M = خمشی

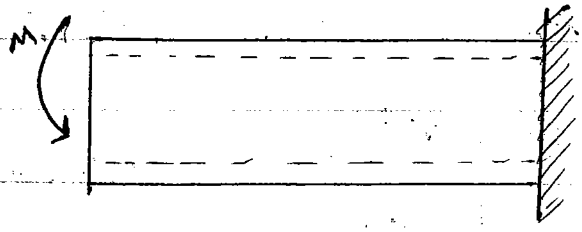
T = پیچشی

مثال: در تیر شکل مقابل در صورتیکه داشته باشیم ، $\sigma_{\text{مجاز کششی}} = 40\ MPa$

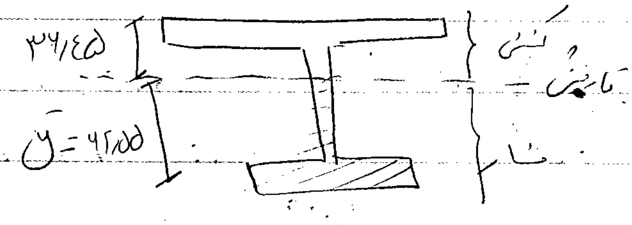
$\sigma_{\text{مجاز فشاری}} = 105\ MPa$

تعیین کنید حداکثر مجاز کوپل M چقدر است؟





اول باید تار خنثی (محور خنثی) را بدست آوریم (استاتیک)



$\sigma = \frac{My}{I}$

$I = 3,91 \times 10^6\ (mm)^4$ نسبت به تار خنثی

در این مقطع نیز ناحیه فشاری و ناحیه کششی داریم که (طبق شکل پایین تار خنثی تحت فشار و بالای تار خنثی تحت کشش است)

حداکثر فاصله از تار خنثی = 36/45

$$\sigma_{max} = \frac{MC}{I}$$

$\underbrace{\sigma_{max\ \text{کششی}}}_{\text{معلوم}} = \frac{MC}{(I)}$ ← معلوم ، I معلوم $\Rightarrow M_1 =$ بدست می‌آید $= \ldots = 4,29 \times 10^6\ (N.mm)$

$\sigma_{max\ \text{فشاری}} = \frac{MC}{I}$, $C \to 42,55 \Rightarrow M_2 =$ بدست می‌آید $= \ldots = 9,65 \times 10^6\ (N.mm)$

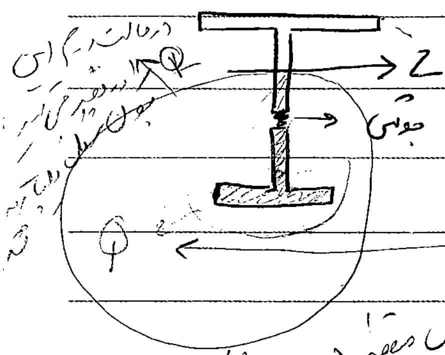
M ی قابل قبول است که هم در ناحیه کششی و هم در ناحیه فشاری جواب دهد یعنی M کمتر یعنی M کمتر قابل قبول است

$$M_{\text{مجاز}} = \min\{M_1, M_2\} = M_1 = 4,29 \times 10^6\ (N.mm)$$

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

کنترل جوش؟



تا وقتی از حد مجاز سطح شکل عبور می‌کند

$$\tau_{\text{جوش}} = \frac{VQ}{It} \le \tau_{\text{مجاز جوش}}$$

معلوم

همان اینرسی شکل مقطع (در این شکل میشه ۳ تا مستطیل)

ضخامت جوش (عرض جوش)

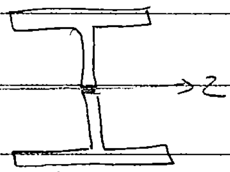
اگر جواب داد

یعنی تبدیل به یک شکل بهم پیوسته شد

حال باید Q تا وقتی را حساب بشم

$$\tau_{\text{فولاد}} = \frac{VQ_{\text{فولاد}}}{It} \le \tau_{\text{مجاز فولاد}}$$

اما اگر شکل $Q_{\text{فولاد}} > Q_{\text{جوش}} \Rightarrow$

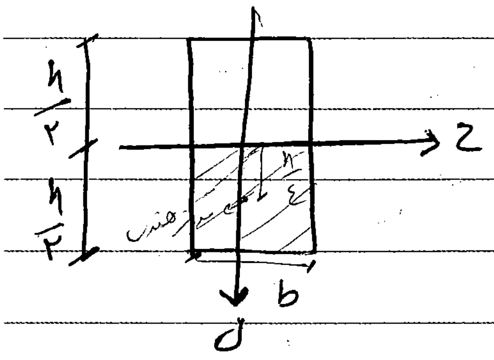


تا وقتی روی جوش کمانده ... اگر $\tau_{\text{فولاد}} = \tau_{\text{جوش}}$ باید $\tau_{\text{مجاز}}$ آن را حساب کنیم و

هر کدام که کمتر است را کنترل می‌کنیم

توضیح این که چطور Q max و τ شود؟

مثال: $\tau_{max} = ?$



$$\tau_{max} = \frac{V_{max}\left[b\frac{h}{2}\times\frac{h}{4}\right]}{\frac{bh^3}{12}\times b} = \frac{3}{2}\times\frac{V}{A}$$

τ_{Ave}

تنش در برش

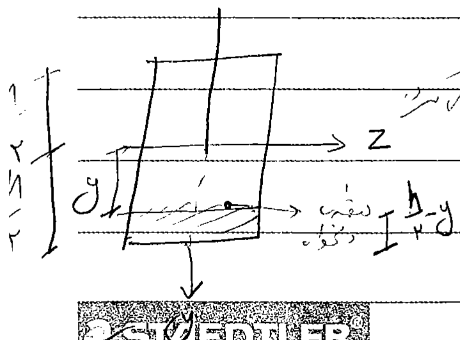
$$\tau_{max} = \frac{3}{2}\times\frac{V}{A} \rightarrow b\times h$$

پس برای مستطیل توپر

مساحت کل سطح

τ_{Ave}

حال اگر بخواهیم در یک نقطه دلخواه یک فرمول کلی بدست آوریم:



یعنی y^2 است سهمی است یعنی تنش برشی ... تغییر می‌کند اما ... تغییر می‌کند

$$\tau = \frac{V\left[\frac{b}{2}\left(\frac{h}{2}-y\right)\left(\frac{h}{2}+y\right)\right]}{\underbrace{\frac{bh^3}{12}}_{I}\times \underbrace{b}_{t}} = \frac{6V}{bh^3}\left[\left(\frac{h}{2}\right)^2 - y^2\right]$$

فرمول کلی **

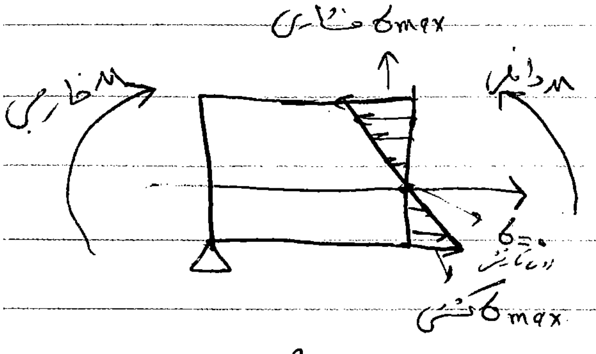
فاصله نقطه مورد نظر از تار خنثی

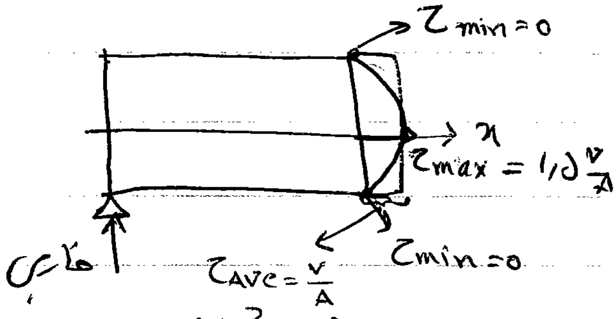
اگر $y=0$ باشد $\tau_{max} = 1.5\frac{V}{A}$ می‌شود.

اگر $y=\pm\frac{h}{2}$ باشد $\tau_{min}=0$ می‌شود **

SUBJECT :

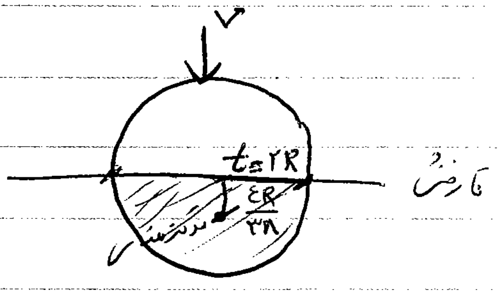
Year ( ) Month ( ) Date ( )





(تنش در اثر خمشی یا بالا یا پایین صفر می‌شود ولی اثر برش در وسط صفر می‌برد) نتیجه مهم

حال برای دایره‌ی توپر:

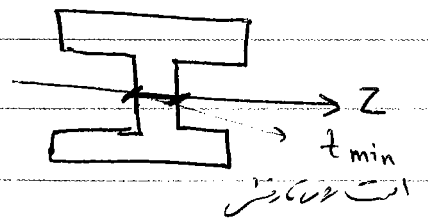


$$\tau_{max} = \frac{V\left[\overbrace{\frac{\pi R^2}{2}}^{\text{ممان اول}} \cdot \overbrace{\frac{4R}{3\pi}}^{\text{مرکز سطح نیم دایره}}\right]}{\underbrace{\left(\frac{\pi R^4}{4}\right)}_{I}\underbrace{(2R)}_{t}} = \frac{4}{3}\underbrace{\frac{V}{A}}_{\tau_{Ave}}$$

پس در دایره توپر: $\tau_{max} = \frac{4}{3}\frac{V}{A}$

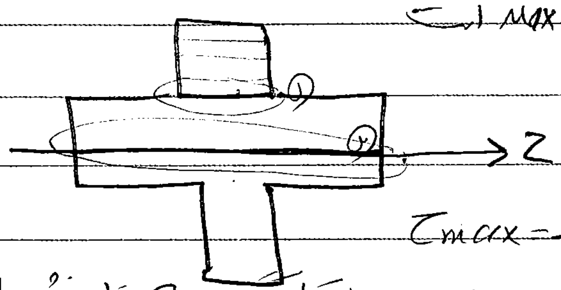
پس برای τ_{max} باید $\frac{Q}{t}$ max شود و V هم max شود

و برای شکل غیر مستطیل برای τ_{max}، Q_{max} و t_{min} باید باشد:
یعنی در همان جایی که Q_{max} است، t_{min} باشد.



مثال: پس این دو تا رو هم ببینیم $\frac{Q}{t}$ max است

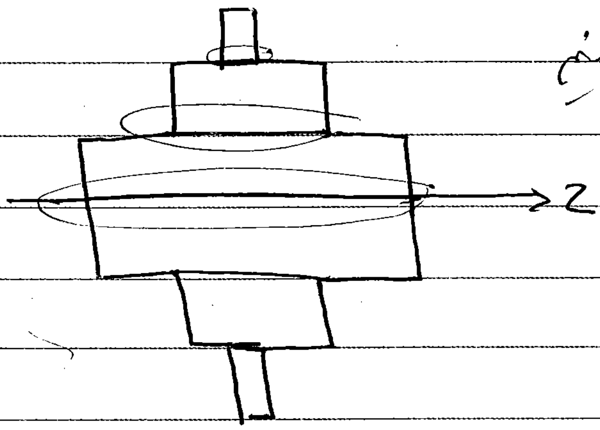
باید محاسبه کرد



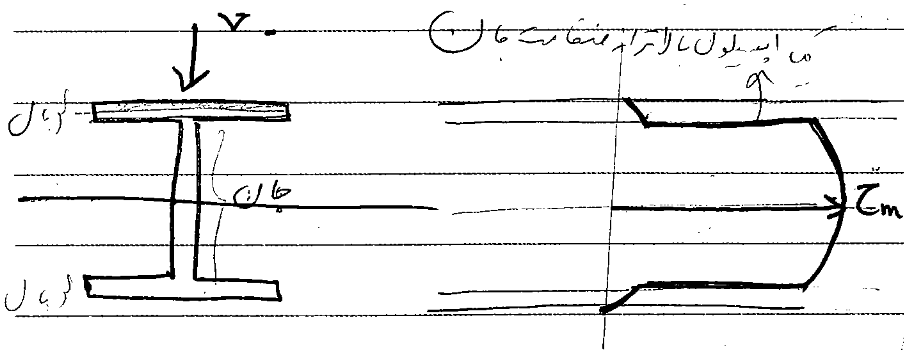
ما τ_{max} را می‌خواهیم و می‌دانیم که $\tau_{max}=\frac{V_{max}\cdot Q_{max}}{I\cdot t_{min}}$

باید مقطعی را در نظر بگیریم که در آن نسبت $\frac{Q}{t}$ max است ابتدا می‌گوییم ① در تار خنثی Q_{max} است اما t در تار خنثی min نیست پس باید در ① و ② نسبت $\frac{Q}{t}$ را محاسبه کنیم هر جا که این نسبت max شده مقطع را در نظر بگیریم

مثال: پس این ۳ تا نقطه باید حساب کنیم که کجا $\frac{Q}{t}$ max می‌شود.



مثال: تنش برشی را رسم کنید.

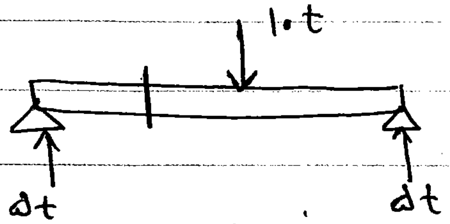


از مقطع خنثی عمده ما کمک به نسبت I ما است
یعنی برشی را به جان می‌دهیم و خمشی را به بال می‌دهیم.

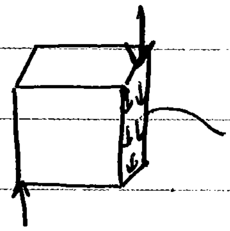
SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

چه وادهای



$V = 5t$ داخلی



τ_{xy} = تقریبی

$\tau_{Ave} = \dfrac{V}{A}$ ⟵ تنش در صفحه قائم (تقریب)

5t خارجی

$\underbrace{\tau}_{} = \dfrac{V \times Q}{I t}$ ⟵ تنش در صفحه افق (دقیق)

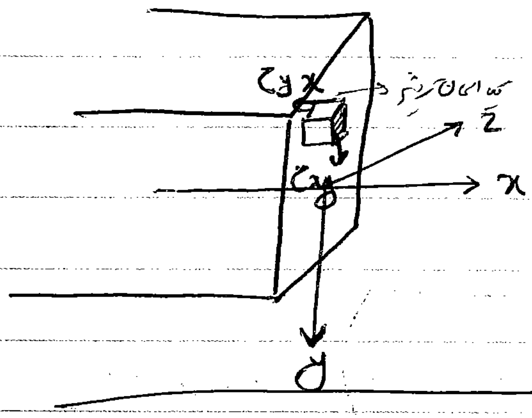
τ_{yx} = دقیق

حل داریم : $\tau_{xy} = \tau_{yx}$

در صفحه x در جهت y

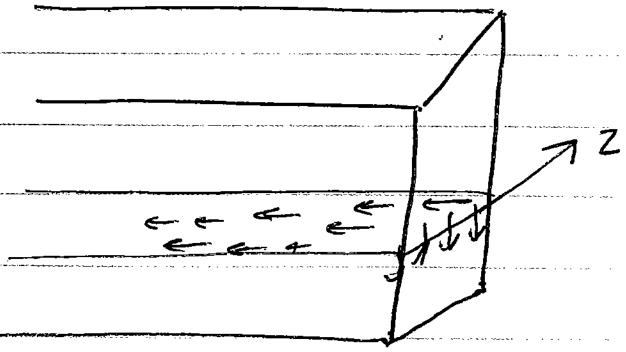
(یادآوری بیشترین تنش برشی در تارخنثی)

بیشترین تنش خمشی در دورترین نقطه از تار خنثی



$Q = 0$

بنابراین در بالاترین و پایین‌ترین نقطه مقطع تنش برشی صفر است و در تارخنثی تنش برشی max است



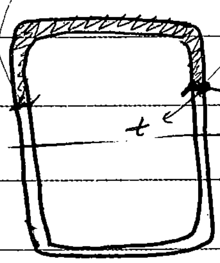
SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

مقاطع تو خالی ؟

برای بدست آوردن

بدون تنش در این نقطه برابر است پس Q ما شامل سطح هاشور خورده



$\tau = \dfrac{VQ}{It}$

سطح قائم ← سطح داخلی

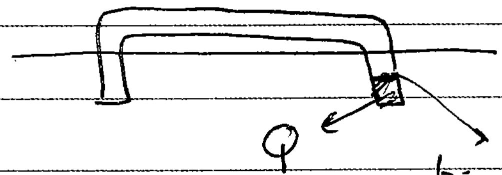
تنش در این نقطه را می‌خواهیم

پس در این نقطه برش می‌زنیم

ادامه‌ش

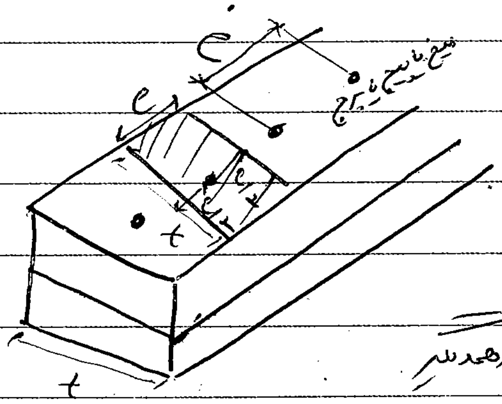
نقاطی که در یک فاصله هستند V هم تنش هستند

اما نقاطی که جدید هستند تنش صفر می‌شود.



تنش در این نقطه

دو نقطه را در نظر می‌گیریم و تصور می‌سازیم.



فرمول

فاصله ۲ پیچ یا پرچ یا میخ متوالی از همدیگر

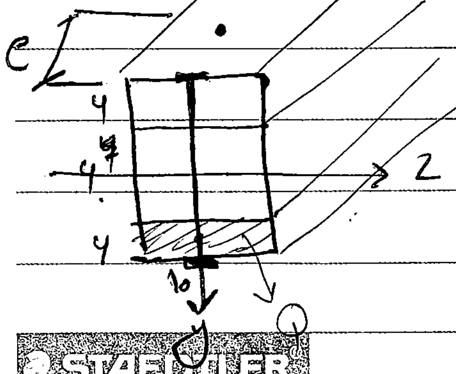
نیروی برشی در هر میخ یا پیچ یا پرچ

$$F = \tau \times A = \frac{VQ}{It} \cdot t \cdot e = \frac{VQ}{I} \cdot e < F_{\text{مجاز}}$$

تنش برشی در جهت عرضی یا جهت طول — مساحت جهت

مجاز هر میخ یا پیچ یا پرچ

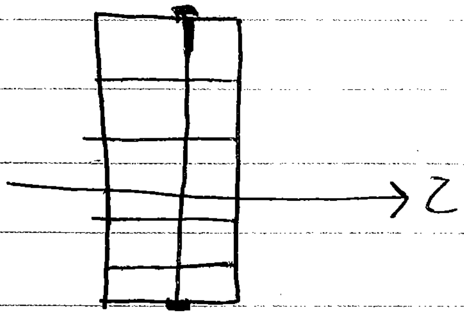
دیفرانسیل جهت است ولی به جای آن جهت میخ آمد.



$$F_{6+6+6} = \frac{V\,[60 \times 6]}{\frac{10(18)^3}{12}} \cdot e < F_{\text{مجاز هر میخ}}$$

SUBJECT :

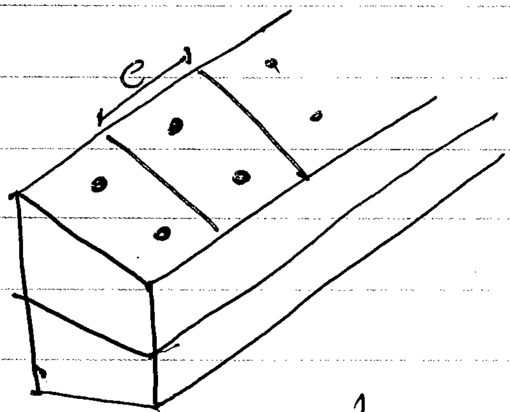
Year (   ) Month (   ) Date (   )



$$F = qe$$

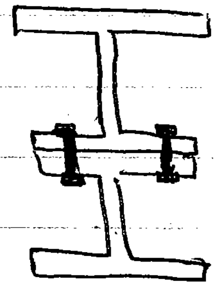
$$\tilde{q}_{\text{جریان برش}} = \frac{VQ}{I}$$

پس درای جا هم وقتی جای میخ را حفظ برای کنترل هم باید مال میخ و هم مال مقطع را کنترل کرد
در کار برش



$$\boxed{2F_1 = \tau \times A}$$

امتحانی



$$\boxed{2F_1 = \tau \times A}$$

نکته مهم ***

در طراحی دست بالا (مقدار پیچ به سمت بالا و فاصله بین پیچ ها به سمت پایین) تعداد پیچ به سمت بالا (پس یادمان باشد که ها باید به سمت پایین رند شود)

جریان برش :

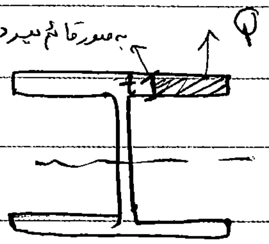
در مورد جریان برش تنش برای شکل محاسبه می شود :

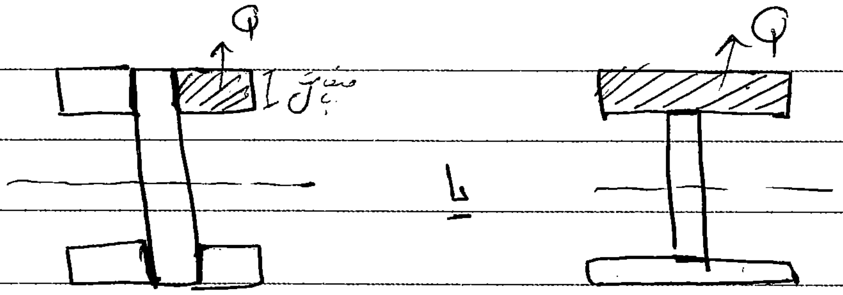
صد (الف)

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

$$\tau = \frac{VQ}{It}$$

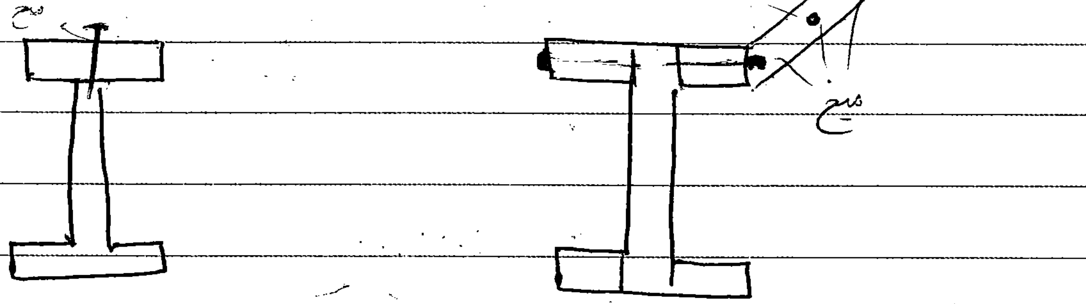




تیرها چسب هستند

$$\tau = \frac{VQ}{It} \leq \tau_{\text{جاز چسب}}$$

$$\tau_{\text{چسب}} = \frac{VQ}{It} \leq \tau_{\text{جاز چسب}}$$



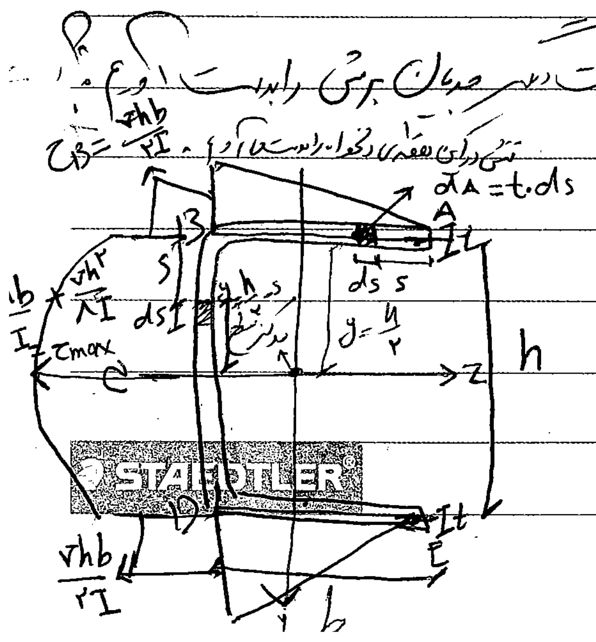
$$F = \frac{VQ}{I} \cdot e \leq F_{\text{جاز}}$$

$$F = \frac{VQ}{I} \cdot e \leq F_{\text{جاز هر میخ}}$$

اگر بخواهیم تنش را در تیر I شکل یا مقاطع دیگر به عبارت دیگر جریان برشی را بدست آوریم

** (توزیع تنش برشی در مقاطع جدار نازک)

مثال: تیر ناودانی



حل در صفحه بعد

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

$$\tau_{AB} = \frac{V}{It}\int y\,dA = \frac{V}{It}\int \underbrace{\frac{h}{2}}_{y}\cdot \underbrace{t\,ds}_{dA} = \frac{Vh}{2I}s$$

(تنش در دامن ۱)

$$\text{حال}\quad \tau_{BD} = \frac{VQ'}{It} + \frac{V}{It}\int y\,dA = \tau_B + \frac{V}{It}\int\left(\frac{h}{2}-s\right)t\,ds$$

$$\text{حال}\quad \tau_{BD} = \frac{Vhb}{2I} + \frac{Vh}{2I}s - \frac{Vh}{2I}\times\frac{s^2}{2}$$

درجه ۲ است
سهمی است (s^2)

$$\text{حال}\quad \tau_{max} = \tau_C = \frac{Vhb}{2I} + \frac{Vh^2}{8I}$$

مثال عددی :

برای شکل صفحه قبل

$$I = \frac{th^3}{12} + 2\left[\underbrace{\frac{bt^3}{12}}_{0} + \underbrace{(bt)\left(\frac{h}{2}\right)^2}_{\text{اشتال}=Ad^2}\right] = \frac{th^2}{12}(h+6b)$$

if
$V = 8000\,N$
$b = 100\,mm$
$h = 150\,mm$
$t = 3\,mm$

$\tau_B = 14.22\,MPa$
$\tau_{max} = 19.54\,MPa$

نکته : ما جریان برش را برای مرکز برشی بدست می‌آوریم

ما دو تا مرکز داریم : ۱- مرکز سطح (مرکز خمشی) : اگر نیرو از مرکز سطح عبور نکند تولید خمش می‌کند

۲- مرکز برش (مرکز پیچش)

نکته : محل برخورد دو محور خمشی (مرکز خمشی = مرکز سطح) هم هست

محور خمشی

SUBJECT :

Year (   ) Month (   ) Date (   )

مرکز سطح نقطه ای است که اگر بخواهیم خمش نداشته باشیم باید نیرو از آن عبور کند

(خمش ناشی از نیروهای محوری و پیچش ناشی از نیروهای برشی است) ##

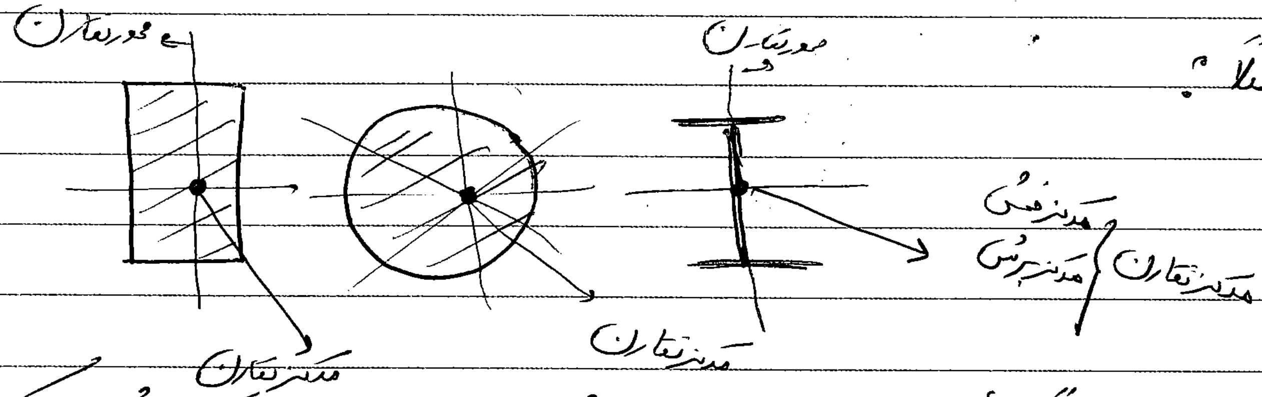
اگر بخواهیم پیچش ایجاد نشود باید نیروهای برشی از مرکز برش بگذرد.

مرکز برش: نقطه ای است که اگر نیروی برشی از آن بگذرد پیچش به وجود نیاید

مرکز سطح: " " " " " نیروی محوری " " خمش " "

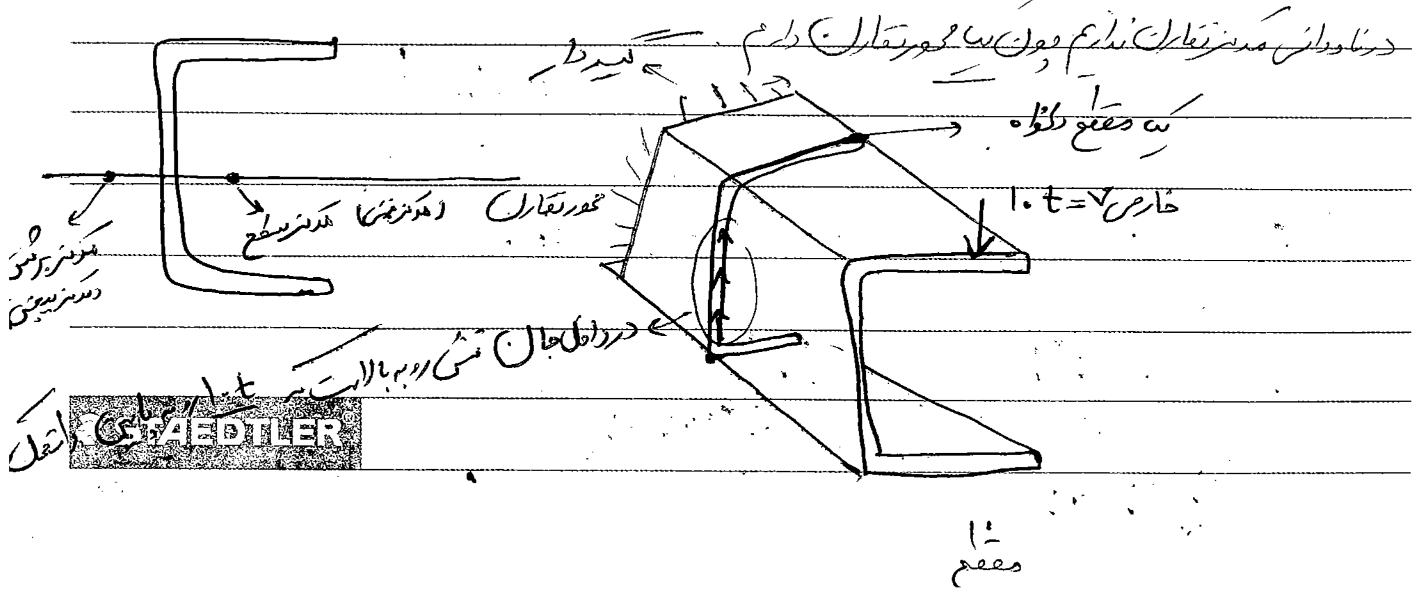
* اگر یک شکل مرکز تقارن داشته باشد آن گاه مرکز سطح و مرکز برش با هم منطبق هستند

مثلا:



* معمولا لزوما قائم نیست هم می تواند افقی باشد و هم مورب که از مرکز برش عبور کند ##

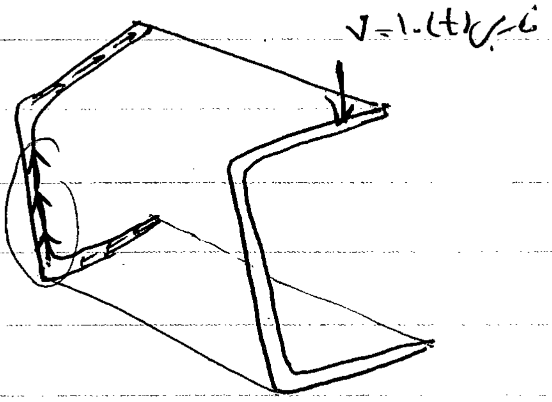
حال اگر شکلی دارای مرکز تقارن نشود باید مرکز برشی آن را بدست آوریم: (ناودانی)



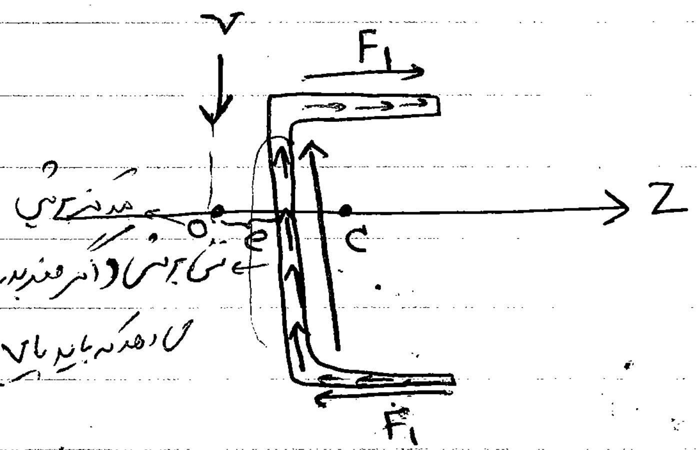
SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

دیاگرام آزاد :



نمایی از روبه رو :



دوتا F_1 کوپل ایجاد کنند که باید V را خنثی کنند یعنی باید منفرد بر مساحت شود.

e = فاصله‌ی مرکز برشی تا مرکز جان

مرکز برشی همیشه روی محور تقارن است

$F_1 =$ تنش در بال $\times$ مساحت بال = در صورتی که تنش یکنواخت باشد

بال τ_{Ave} تنش متوسط را می‌اندازیم

$$\overbrace{F_1 . h}^{\text{کوپل}} = V . e \Longrightarrow \boxed{e = \frac{F_1 . h}{V}}$$

$$F_1 = \tau^{\text{بال}}_{Ave} \times A_{\text{بال}} = \frac{Vhb}{4I} \times bt = \frac{Vthb^2}{4I}$$

(با توجه به شکل آخر صفحه‌ی صفحه‌ی الف)

$$e = \frac{Vth^2b^2}{V(4I)} = \frac{\cancel{V}th^2b^2}{\cancel{V}\frac{th^2(4b+h)}{3}} \Longrightarrow \boxed{e = \frac{3b^2}{h+4b} = \frac{b}{2+\frac{h}{3b}}}$$

$$I = \frac{th^2}{12}(h+4b)$$

SUBJECT :

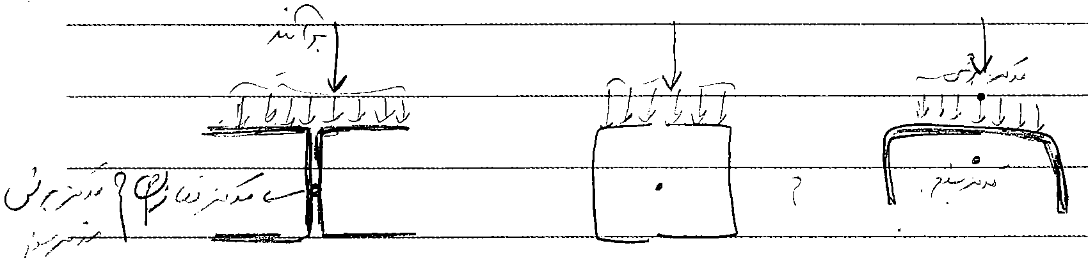
Year (   ) Month (   ) Date (   )

$$\text{if}\begin{cases} V = 8000\,N \\ b = 100\,mm \\ h = 150\,mm \\ t = 3\,mm \end{cases} \Longrightarrow \boxed{e = 40\,mm}$$

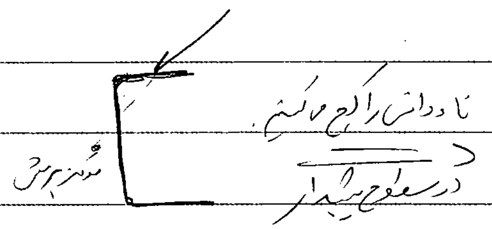
پس نتیجه: اگر یک مقطع ناودانی داشتیم باید نیرویی که به آن وارد می‌کنیم در ۴۰mm به سمت بیرون ناودانی باشد.

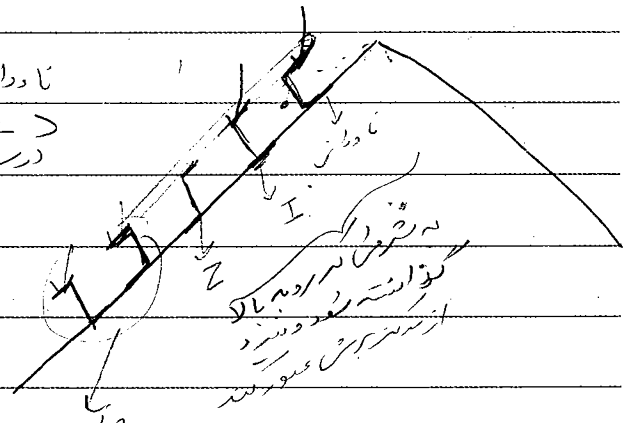
سؤال: در ناودانی چه جوری نیرو وارد شود؟ چون این جوری که در شکل نشان داده شده نیرو چون بیرون ناودانی است نمی‌شود

راه حل: ناودانی را دوبل می‌کنیم (در صورتی که بخواهیم به عنوان تیر استفاده کنیم که نپیچد) یا باید شکل زیر در بیاوریم.



بهترین حالت:





نیرو به صورت مورب وارد شود

حالت بد است این مدل (چون رو به پایین گذاشته شده) دچار پیچش می‌شود

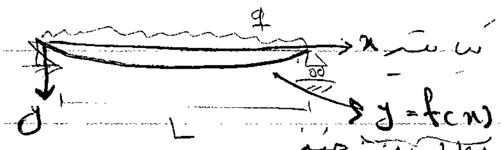
مثال ۵.۶ و ۶.۶ ص ۲۴۰ ص ۲۴۱

SUBJECT :
Year (   ) Month (   ) Date (   )

فصل ۶: تغییر شکل تیرها

قبلاً بحث تنش و مقاومت است
در این

می‌خواهیم بررسی کنیم مثلاً یک تیر چه مقدار تغییر شکل می‌دهد (هر تیری با بار مشخص شده)



معادله‌ی منحنی چند

تکیه‌گاه‌ها و بارگذاری چه جوری تیر را تغییر شکل می‌دهد (یعنی معادله‌ی $y = f(x)$ را می‌خواهیم بدست آوریم) = هدف این فصل

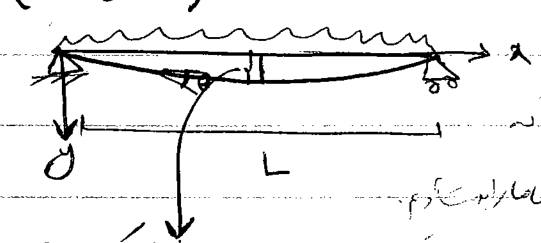
درجه ۳ یا ۴ و ...

که به $y = f(x)$ معادله‌ی منحنی الاستیک تیر گفته می‌شود

حال چه اطلاعاتی را می‌خواهیم؟

وقتی معادله‌ی منحنی را پیدا کردیم y هر نقطه را به راحتی می‌توان بدست آورد.

(شکل الف)



چیزهایی که لازم داریم
(نقطه‌ای که بیشترین تغییر شکل را دارد)

برای بدست آوردن چیزهای لازم از منحنی $y = f(x)$ مشتق می‌گیریم و مساوی صفر قرار می‌دهیم و xهایی که بدست می‌آید را در معادله‌ی y قرار می‌دهیم تا نقطه‌ی ماکزیمم را بدست آوریم.

* بیشترین شیب در تکیه‌گاه‌ها است *

$\tan\theta = y' =$ شیب

از نقاط دیگری که شیب مهم است شیب ابتدا و انتها است که باید $y' = 0$ قرار دهیم

هدف دیگر از این مبحث تحلیل تیرهای نامعین است (مثلاً تیری که ۳ تا تکیه‌گاه دارد باید معادله‌ی سازگاری تغییر شکل‌ها را بنویسیم)

تغییر شکل تیرها:

(در صفحه‌ی بعد)

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

در فصل خمش
θ: جدول شماره ①

$$\frac{1}{\rho}=\frac{d\theta}{dx}$$

چون θ زاویه اش
خیلی کوچک است

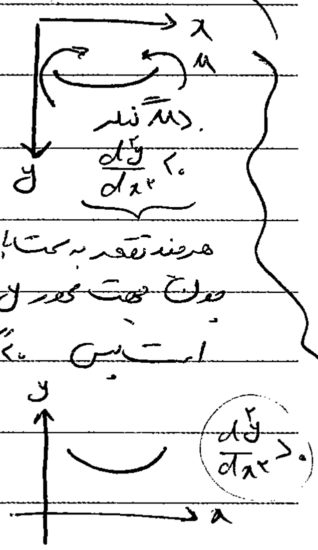
$$\Rightarrow \theta=\tan\theta=\underbrace{\frac{dy}{dx}}_{y=\text{شیب}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\rho}=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}=\boxed{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

در فصل خمش جدول
شماره ⑤

$$\frac{1}{\rho}=\boxed{\frac{M}{EI}}$$

$$\frac{M}{EI}=\overset{\text{منفی}}{-}\frac{d^2y}{dx^2}$$



هرچند تقعر به سمت بالا است اما
چون جهت محور y به سمت پایین
است منفی y گرفته می‌شود

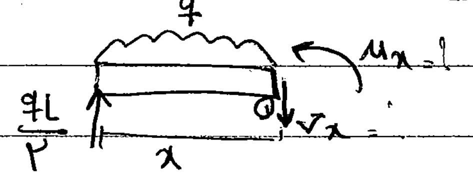
معادله دیفرانسیل منحنی الاستیک

$$EI\,y''=-\underbrace{M_x}_{M\text{ بر حسب }x\text{ است}}\xrightarrow[\text{y بدست آید}]{\text{دو بار انتگرال می‌گیریم تا}}$$

ادامه در صفحه بعد

M را هم باید مقطع بزنیم و برحسب x
بدست آوریم.

با توجه به شکل الف صفحه قبل یک مقطع به فاصله x می‌زنیم (پیدا کردن M_x = هدف)



نکته: همیشه با هر بارگذاری و هر نوع تکیه گاهی
باید دو بار انتگرال بگیریم تا y را بدست آوریم.

و ثابت ها را C_1 و C_2 و ... را هم باید با بارگذاری نقاط
مرزی $y=0 \Leftarrow x=L$ و $y=0 \Leftarrow x=0$

$\Sigma M_O=0$

$$\underbrace{M_x+qx\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{qL}{2}x}_{\text{معادله } M_x \text{ بدست آمد}}$$

ادامه حل معادله

$$EI\,y''=\frac{qx^2}{2}-\frac{qL}{2}x\xrightarrow{\text{انتگرال}}EI\,y'=\frac{qx^3}{6}-\frac{qLx^2}{4}+C_1\xrightarrow{\text{انتگرال}}$$

$$EI\,y=\frac{qx^4}{24}-\frac{qLx^3}{12}+C_1x+\cancel{C_2}\xrightarrow{\text{سپس}}$$

(در صفحه بعد)

شرایط مرزی
$x=0,\ y=0 \Rightarrow \boxed{C_2=0}$

شرایط مرزی
$$\left.\begin{array}{l}x=L\\ y=0\end{array}\right\}\Rightarrow 0=\frac{qL^4}{24}-\frac{qL^4}{12}+C_1L\Rightarrow \boxed{C_1=\frac{qL^3}{24}}$$

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

$$\cancel{EIy' = \frac{qx^3}{4} - \frac{qLx^2}{4} +}$$

پس: $y'' = \frac{1}{EI}\left[\frac{qx^2}{2} - \frac{qL}{2}x\right]$

$$y' = \frac{1}{EI}\left[\frac{qx^3}{6} - \frac{qLx^2}{4} + \frac{qL^3}{24}\right]$$

$$\cancel{y = f(x)}$$

$$\boxed{y = \frac{1}{EI}\left[\frac{qx^4}{24} - \frac{qLx^3}{12} + \frac{qL^3x}{24}\right]}$$

حال اگر ماکزیمم را بخواهند [که در این مسئله تیر شکل الف ، به علت تقارن ماکزیمم خیز در وسط است]

برای بدست آوردن خیز $y'=0$ قرار می‌دهیم

$$y' = 0 \implies x = \frac{L}{2}$$

$x = \frac{L}{2}$ را در $y = f(x)$ قرار می‌دهیم :

$$y_{max} = \frac{5\overset{\text{شدت بار}}{q}L^4}{384EI} \quad \text{طول تیر}$$

اگر شیب تیر در تکیه‌گاه را بخواهند (شیب حداکثر = شیب تکیه‌گاه)

شیب حداکثر یعنی $y' = max$ شود پس باید $y'' = 0$ قرار دهیم

$$y'' = 0 \implies \begin{cases} x = 0 \\ x = L \end{cases} \xrightarrow{x=0} y'_{max} = \underset{\theta = \tan\theta}{\theta_{max}} = \frac{qL^3}{24EI}$$

x ها را در y' قرار می‌دهیم

$$x = L \implies y'_{min} = \theta_{min} = -\frac{qL^3}{24EI}$$

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

اگر جواب ندهد ابعاد تیر را عوض

با داشتن مقدار Q داریم - کنترل برش - کنترل تنش برشی ✓ $\tau_{max} = \frac{V_{max}\cdot Q}{It} \le \tau_{مجاز}$ مقطع O

اگر جواب ندهد ابعاد تیر را عوض می‌کنند

در انتخاب تیر برشی و خمشی - کنترل تنش قائم ✓ $\sigma_{max} = \frac{M_{max}\cdot C}{I} \le \sigma_{مجاز}$ مقطع

باید کنترل برشی و خمشی

خیز مجاز ≥ خیز تیر ← کنترل خیز ✓ $\frac{5qL^4}{384EI} \le$ خیز مجاز

خیز مجاز را به صورت $\frac{L}{عدد}$ می‌دهند

اگر جواب ندهد به ما اجازه که خیز زیاد شود، مصالح دیگر یا ممان اینرسی بیشتر تیر را می‌افزایند

دلیل خیز ... سازه‌های فلزی (سازه‌های ...)

اگر در زیر سقف باشیم خیز داشته باشد از نگاه ... مشکل دارد.

هر وقت خیز وجود داشت دلیل برای این است که تنش وجود دارد.

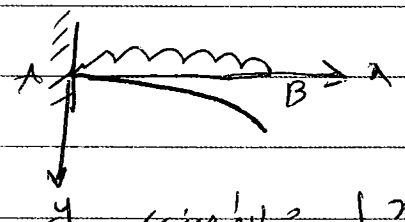
در تیرهای دهانه کوتاه برش غالب است (τ_{max} تعیین کننده است)

متوسط σ_{max} تعیین کننده است

دهانه بزرگ خیز تعیین کننده است (اگر ... باشد)

نکته: اگر شرایط تکیه‌گاهی به صورت زیر باشد

منظور این تیر با شرایط این است که معادله M ...



شرایط مرزی $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$, $\begin{cases} x=0 \\ y'=0 \end{cases} \Rightarrow C_1=?\ \ C_2=?$

شرایط دو تکیه‌گاه

هر تکیه‌گاه مفصلی یک شرط مرزی دارد که $y=0$ است.

در تکیه‌گاه گیردار دو شرط مرزی دارد که $y=0$ و $y'=0$ است

تکیه‌گاه آزاد شرط مرزی ندارد.

STAEDTLER (تا این جا سوال ... مفهومی است) ادامه ...

SUBJECT :

Year ( ) Month ( ) Date ( )

از این جا به بعد کاربردی است. (برای حل مسئله های این مبحث جدول به ما می دهند)
تغییر شکل

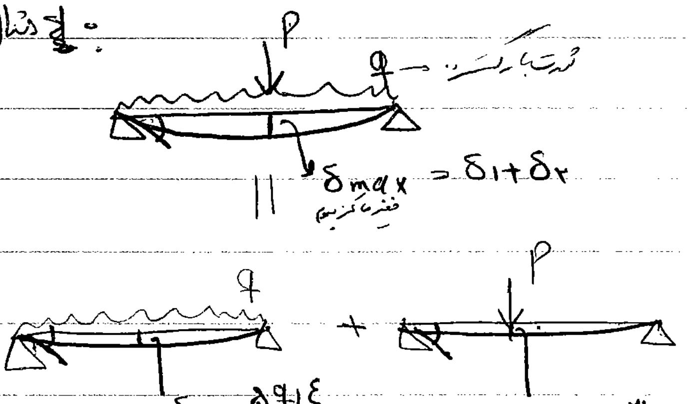
خیلی مهم

* تحلیل تیرهای نامعین :

(جدول صفحه ۶۴۸ جانسون پیوست د)

مقدمه : مثال برای کاربرد جدول

مثال ۱ :



$\delta_{max} = \delta_1 + \delta_2$

خیز ماکزیمم

$\delta_1 = \frac{5qL^4}{384EI}$ — از جدول بدست می آید

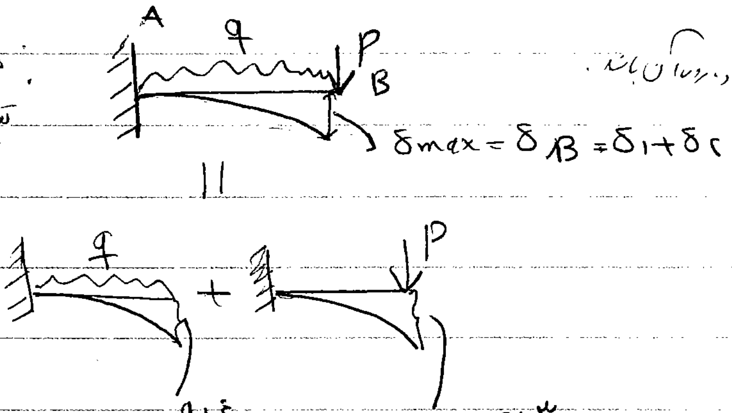
$\delta_2 = \frac{PL^3}{48EI}$ — از جدول بدست می آید

خیز ماکزیمم و شیب را لازم داریم؟

کاربرد اصل برهم نهی (جمع آثار قوا)

تمام مشخصات تیر مجموع این دو تیر می شود. حتی تغییر شکل تیر اصلی ($y=f(x)$) هم مجموع تغییر شکل این دو تیر است. یعنی دو معادله را با هم جمع می کنیم (خیز ماکزیمم (δ_{max}) هم از جمع δ_1 و δ_2 بدست می آید.

مثال ۲ : تیر کنسول

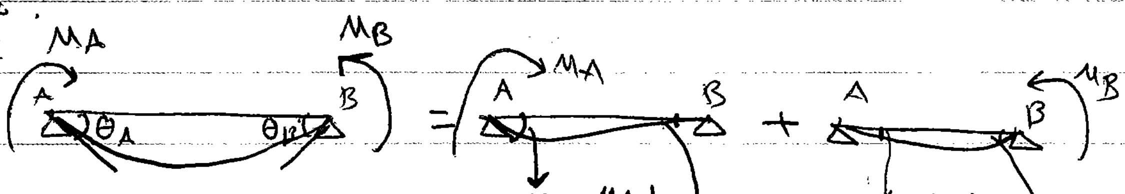


$\delta_{max} = \delta_B = \delta_1 + \delta_2$

$\delta_1 = \frac{qL^4}{8EI}$ $\delta_2 = \frac{PL^3}{3EI}$

اگر بار متمرکز از پایین به تیر وارد شود و بار گسترده رو به بالا باشد آنگاه $\delta_{max} = \delta_1 - \delta_2$ می شود

مثال ۳ : گشتاور در دو طرف M_B و M_A گشتاور



زاویه A $= \frac{M_A \cdot L}{3EI}$ زاویه A $= \frac{M_B \cdot L}{6EI}$

زاویه B $= \frac{M_A \cdot L}{6EI}$ (2×3) زاویه B $= \frac{M_B \cdot L}{3EA}$

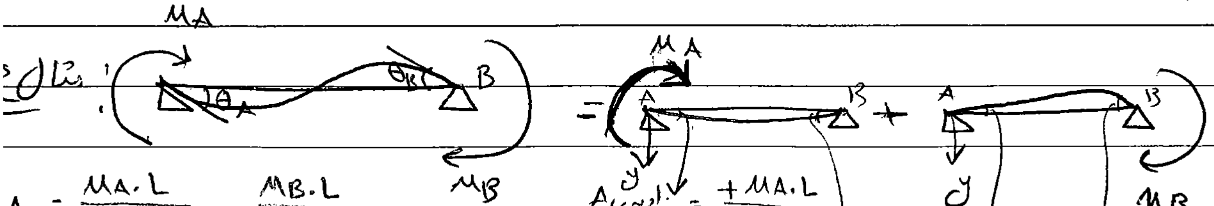
نصف زاویه A است

پس $\theta_A = \frac{M_A \cdot L}{3EI} + \frac{M_B \cdot L}{6EI}$

$\theta_B = \frac{M_A \cdot L}{6EI} + \frac{M_B \cdot L}{3EA}$

No...............

(دوم)



$$\theta_A = \frac{M_A \cdot L}{3EI} - \frac{M_B \cdot L}{6EI}$$

$$\theta_B = \frac{-M_A \cdot L}{6EI} + \frac{ML}{3EI}$$

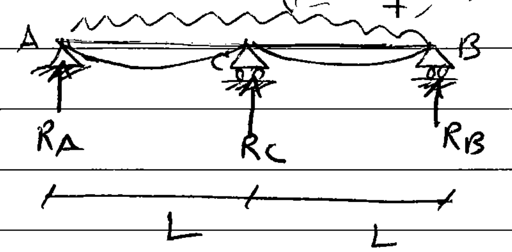
زاویه $A = \frac{+M_A \cdot L}{3EI}$ زاویه $A = \frac{-M_B \cdot L}{6EI}$

در این حالت فرض می‌کنیم

زاویه $B = \frac{-M_A \cdot L}{6EI}$ زاویه $B = \frac{ML}{3EI}$

حالت اول

تیر نامعین: (عامل ضد اضافی را به عنوان بار خارجی در نظر می‌گیریم و سپس برهم‌نهی می‌کنیم)



معادلات تعادل داریم $\Sigma F_y = 0$ است $\Sigma M = 0$

و برای ΣM همه جا است به معادلات تعادل در رابطه نیاز داریم

با توجه به شکل آخر صفحه

معادله سازگاری تغییر: $\delta_C = (\delta_C)_1 + (\delta_C)_2 = 0 \Rightarrow \frac{5q(2L)^4}{384EI} + \left(-\frac{R_C(2L)^3}{48EI}\right) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{R_C = \frac{5}{4} qL}$$

در این فصل اول به سراغ معادلات تعادل نمی‌رویم چون ما ابتدا سازگاری داریم که معادله یک مجهول است پس اول معادله سازگاری را حل می‌کنیم و بعد به سراغ معادلات تعادل می‌رویم.

معادلات تعادل:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow \boxed{R_A + R_B + R_C = 2qL}$$

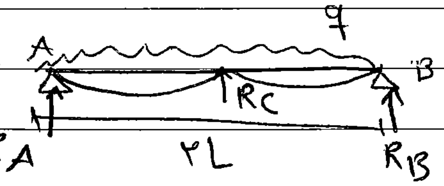
$$\Sigma M_C = 0 \Rightarrow \boxed{R_A = R_B} = \frac{3}{8} qL$$

۲ معادله و ۳ مجهول پس نامعین است

وقتی R_C برابر $\frac{5}{4} qL$ است پس $\frac{3}{4}$ دیگر می‌ماند که بین R_A و R_B تقسیم می‌شود و به هر کدام $\frac{3}{8} qL$ می‌رسد $(2qL - \frac{5}{4}qL = \frac{3}{4}qL)$

در این شکل اگر ۲ تا تکیه‌گاه داشت حالت اول بود (استاتیکی)

اگر تکیه نبود $\Rightarrow$

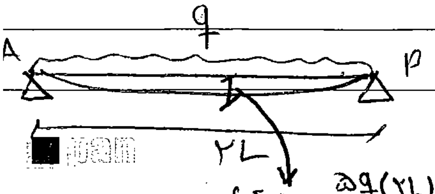


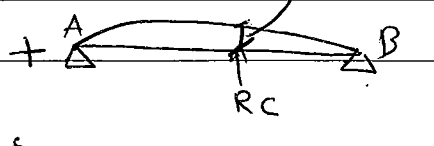
ولی برای اینکه این شکل با شکل اصلی برابر باشد R_C را به جای اینکه به عنوان عکس‌العمل در نظر بگیریم به عنوان عمل در نظر می‌گیریم

حال این شکل را سوپر پوزیشن می‌کنیم

||

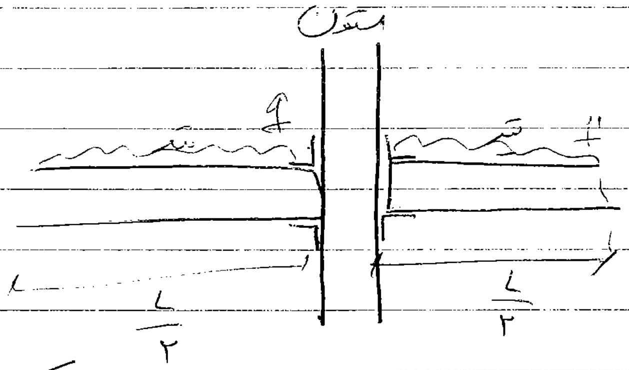
$$(\delta_C)_2 = \frac{-R_C(2L)^3}{48EI}$$



+


$$(\delta_C)_1 = \frac{5q(2L)^4}{384EI}$$

نتیجه: عکس العمل تکیه‌گاه وسط دو برابر تکیه‌گاه‌های کناری نشد بلکه از آن‌ها بیشتر شده است



در این جا تیر قطع شده

که ستون qL و تیرهای کناری

بار $\frac{qL}{2}$ را می‌گیرد

اما در شکل صفحه‌ی قبل تیر قطع نشده و به صورت سراسری است که R_C که

همان نقش ستون را بازی می‌کند $\frac{5}{4}$ بار را می‌گیرد و دو برابر کناری‌ها نیست

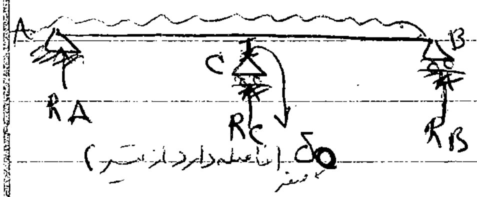
در این جا یک مسئله مطرح می‌شود:

عکس العمل‌ها = ?

حالت دوم:

معادلات تعادل آن مثل حالت اول است

اما: δ_0 صفر نیست

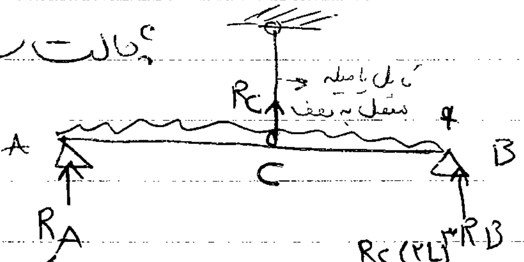


معادله‌ی سازگاری:

$$\delta_C = \delta_1 + \delta_2 = \delta_0 \Longrightarrow \boxed{R_C = \text{محاسبه می‌شود}}$$

حالت سوم:

کابل قطع نشده می‌شود.



سازگاری:

$$\delta_C = \underbrace{\delta_1}_{\frac{5q(2L)^4}{384EI}} + \overbrace{\delta_2}^{\frac{R_C(2L)^3}{48EI}} = \underbrace{\frac{R_C \cdot L}{EA}}_{\frac{PL}{EA}} = \frac{R_C}{\frac{EA}{L}}$$

با تیر

کابل

همان k در فنر است

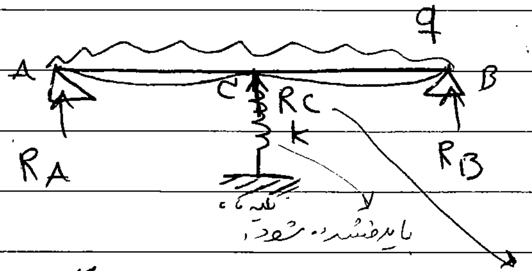
No...............

درای با معادله سازگاری یا قضیه ... است

R با عث فنری ... کنند باعث دوران ... می شود.

فنر به سقف و حالت ها

متصل شود یا فنر به زمین وصل شود

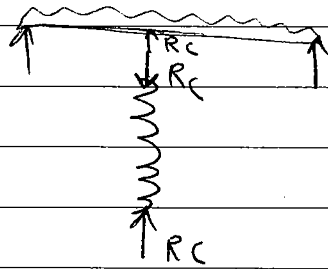


تغییر طول فنر

$F=k.\Delta x \Rightarrow \Delta x=\frac{F}{k}$

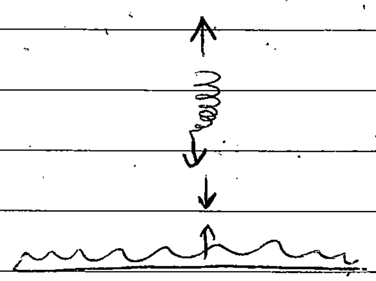
سازگاری:

$\delta_C=\delta_1+\delta_2=\frac{R_C}{k}$ → نیرویی که از فنر به تیر وارد می شود.



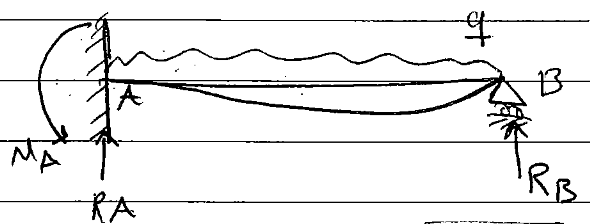
دیاگرام فنر:

اگر فنر بالا باشد:

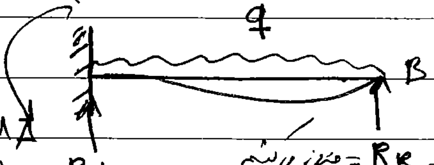


یا R_B اضافه است و یا M_A اضافه است

حالت اول: R_B اضافه است.



مانند حالت اول هم



تعداد معادله

$\sum F_y = R_A + R_B = qL \Rightarrow \boxed{R_A=\frac{5}{8}qL}$

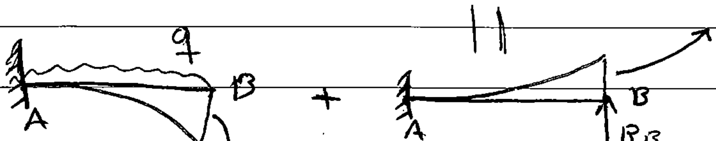
$\sum M_A=0 \Rightarrow M_A+R_B\cdot L=\frac{qL^2}{2}$

$\boxed{M_A=\frac{qL^2}{8}}$

$qL-\frac{3}{8}qL=\frac{5}{8}qL=R_A$

معین می شود $R_B = \frac{3}{8}qL$

R_B تکیه گاه ثابت و با ...



$\frac{-R_BL^3}{3EI}$

$\frac{qL^4}{8EI}$

معادله سازگاری

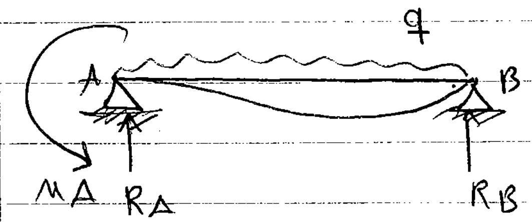
$; \delta_B=\delta_1+\delta_2=0 \Rightarrow \boxed{R_B=\frac{3}{8}qL}$

طبق شکل جابجایی B صفر است

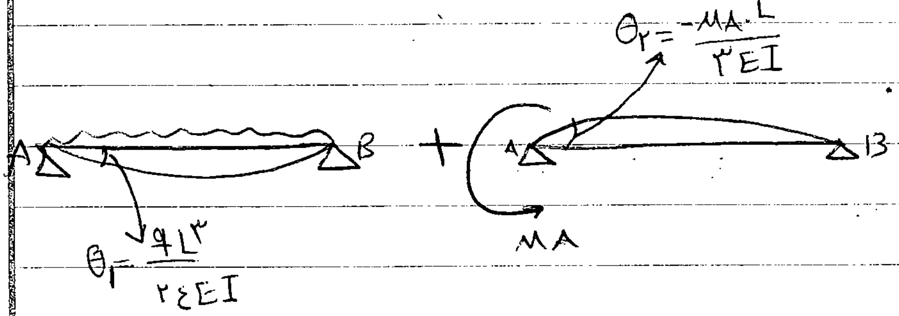
No.

حالت دوم = M_A مجهول است:

اگر ما M_A را مجهول در نظر بگیریم، تیر درجه یک معین می‌شود
(یعنی M_A را از حالت تکیه‌گاه (عکس العمل) خارج می‌کنیم)



$||$



معادله‌ی سازگاری:

چون تعداد مجهولات ما ... پس معادله سازگاری را باید بنویسیم

$$\theta_A = \theta_1 + \theta_2 = 0 \Rightarrow \boxed{M_A = \frac{qL^2}{8}}$$

معادلات تعادل:

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow \frac{qL^2}{8} + R_B \cdot L = \frac{qL^2}{2} \Rightarrow \boxed{R_B = \frac{3}{8}qL}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_A + R_B = qL \Rightarrow \boxed{R_A = \frac{5}{8}qL}$$

چند مسأله:

مثال ۱: (امتحانی)

(وسط تیر AB روی وسط تیر CD تکیه کرده)

تیر AB از روی تیر CD عبور کرده و با آن تماس دارد

بار P مستقیم روی AB است

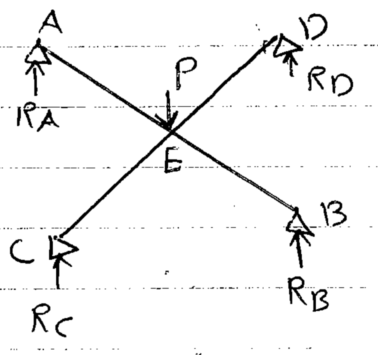
و CD به طور غیر مستقیم بار P را تحمل می‌کند

ممان اینرسی مشخصات AB ، I باشد

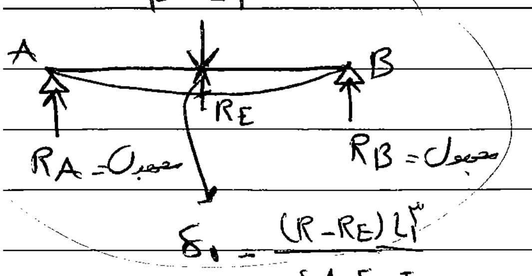
و مشخصات CD ، ۲I باشد

بدون تعیین تعداد معادلات تعادل تیرها

است هم ... (در ...)



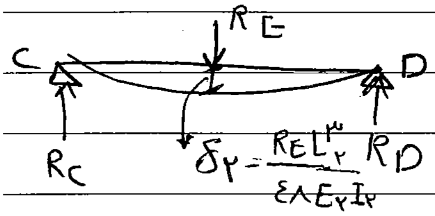
دراصل باید سوپرپوزیشن کنیم (اما در این جا می شود) No. (P − R_E ، E



$$\delta_1 = \frac{(P - R_E) L_1^3}{48 E_1 I_1}$$

تیر پایینی برای تیر بالایی به منزله تکیه گاه است

اما تیر بالایی به منزله قرار گرفتن بار روی تیر پایینی است



$$\delta_2 = \frac{R_E L_2^3}{48 E_2 I_2}$$

پس در کل ۵ تا مجهول داریم و برای هر تیر دو

معادله تعادل داریم : ۱ درجه نامعین | ۴ معادله ، ۵ مجهول

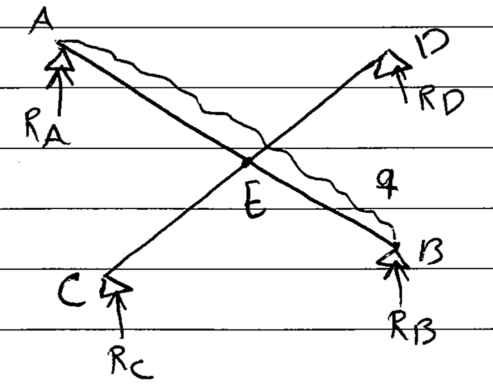
در نقطه E باید هم برابر باشند ⟸ تغییر CD = تغییر AB

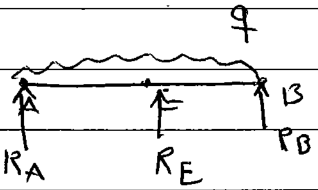
معادله سازگاری : $\delta_1 = \delta_2$ ⟸ R_E = بدست می‌آید

نکته : اگر یک تیر بدون بار به ما دادند باید وزن تیر آن را بدست [illegible] در نقطه تلاقی هم جهت

در مقاومت [illegible] را با بار متمرکز در نقطه آن معادل نماییم

مثال ۱ : بار تقسیم

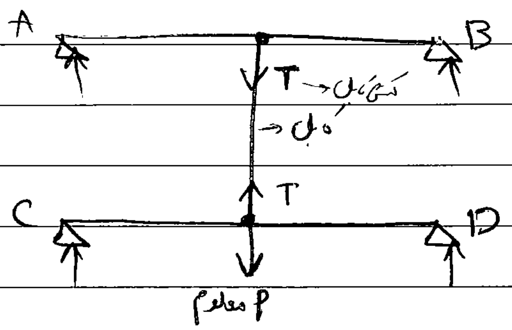




باید سوپرپوزیشن شود

اما باز هم $\delta_1 = \delta_2$ برقرار است

مثال ۲ : نکته : نیروهایی که به کابل وارد می‌شوند کششی است

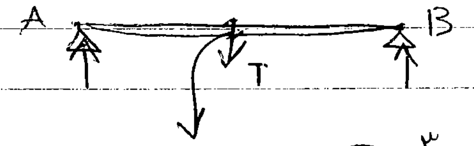


وزن کابل به تیر پایینی وصل کردیم.

۵ مجهول

No.

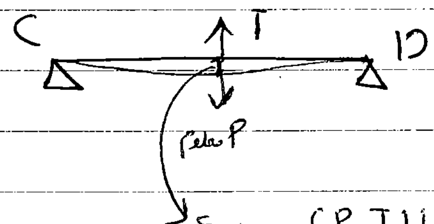
دیگر لازم آزاد شد



$$\delta_1 = \frac{TL_1^3}{48E_1I_1}$$

سازگاری : $\delta_2 - \delta_1 = \delta_{\text{کابل}}$

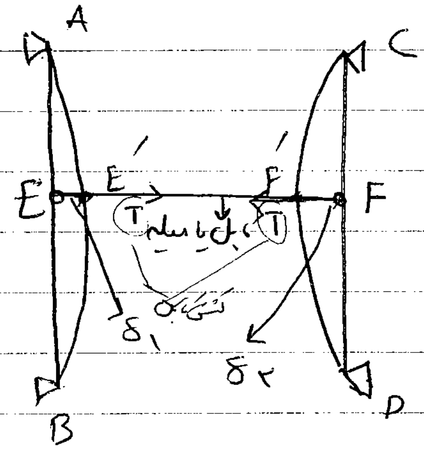
$$\frac{(P-T)L_2^3}{48E_2I_2} - \frac{TL_1^3}{48E_1I_1} = \frac{TL_3}{E_3A_3}$$



$$\delta_2 = \frac{(P-T)L_2^3}{48E_2I_2}$$

مثال ۳ :

کابل را سرد کنیم تا دو طرف تیرها را
حل کنید



سازگاری : $|\delta_1| + |\delta_2| = |\delta_{\text{کابل}}|$

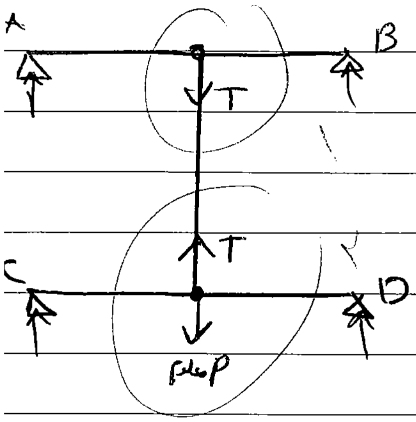
$$\frac{TL_1^3}{48E_1I_1} + \frac{TL_2^3}{48E_2I_2} = |\alpha \cdot L\Delta T| - \frac{TL}{EA} \Rightarrow \boxed{T = \text{بدست می‌آید}}$$

چون کابل را سرد کردیم

اگر کابل در سر خودش یا اسپرش آزاد بود فقط تغییر طول ناشی از دما بود اما چون در سیستم قرار گرفته پس
تغییر طول ناشی از T را هم باید بگذاریم

No...............

مثال:



$$\frac{TL_1^3}{48E_1I_1} + \frac{(T-P)L_2^3}{48E_2I_2} = |\alpha L \Delta T| - \frac{TL}{EA}$$

$$\underset{\text{فنر ۲}}{\delta_2} - \underset{\text{فنر ۱}}{\delta_1} = \delta_{\text{میله}}$$

$$\frac{(P-T)L_2^3}{48E_2I_2} - \frac{TL_1^3}{48E_1I_1} = \frac{TL}{EA} + \alpha L \underbrace{\Delta T}_{-20}$$

طول

فنر ۱ و فنر ۲ ← [illegible]

No.