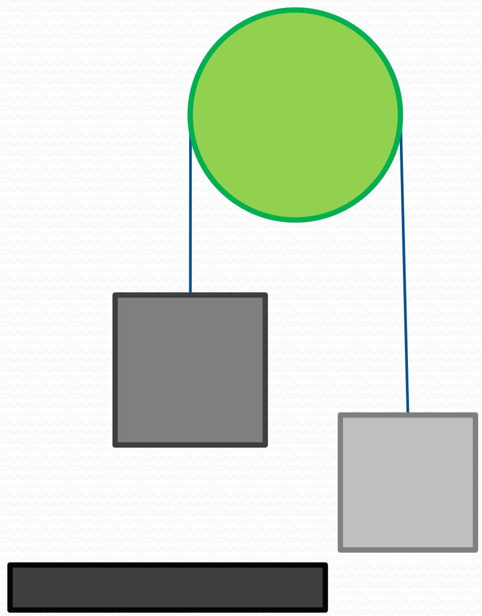
مرکز طراحی ساختمان

Dynamics

دینامیک



References مراجع

1. Vector Mechanics for Engineers, Dynamics
    - By: Beer & Johnston, McGraw Hill

2. Engineering Mechanics, Dynamics
    - By: Merriam & Kraige, John Wiley Sons

Kinematics of Particles

سینماتیک ذرات

فصل ۲

- معرفی
- حرکت مستقیم الخط
  - تعاریف سرعت و شتاب
  - راه حل های تحلیلی
  - راه حل های گرافیکی
- حرکت بیش از یک ذره
  - حرکت نسبی دو ذره
  - حرکات وابسته
- حرکت ذرات بر مسیر منحنی الخط
  - روابط
  - یادآوری روابط مشتق برداری
- سیستم مختصات دوبعدی
  - کارتزین
  - n-t
  - r-θ
  - حالات خاص در n-t r-θ
- حرکت در فضا
  - سیستم مختصات استوانه ای
  - سیستم مختصات کروی

Introduction معرفی

سینماتیک :

مطالعه ی هندسی حرکت یک جسم(ذره)

سینتیک :

مطالعه ی روابط بین نیرو، جرم و حرکت یک جسم(ذره)

Rectilinear Motion حرکت مستقیم الخط

مفاهیم و تعاریف

راه حل های تحلیلی

راه حل های گرافیکی

Velocity & acceleration سرعت و شتاب

- سرعت متوسط (average velocity)

$$\bar{v}=\frac{x_2-x_1}{t_2-t_1}=\frac{\Delta x}{\Delta t}$$

- سرعت لحظه ای (instantaneous velocity)

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{dx}{dt}$$

- شتاب متوسط (average acceleration)

$$\bar{a}=\frac{v_2-v_1}{t_2-t_1}=\frac{\Delta v}{\Delta t}$$

- شتاب لحظه ای (instantaneous acceleration)

$$a=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{dv}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)=\frac{d^2x}{dt^2}$$

- رابطه ی دیفرانسیلی شتاب، سرعت و جابجایی

$$a=\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt}=\frac{dv}{dx}v\Rightarrow a.dx=v.dv$$

تعاریف و نمادگذاری ها

- حرکت تندشونده و کندشونده (accelerating & decelerating)

a.v<0 decelerating

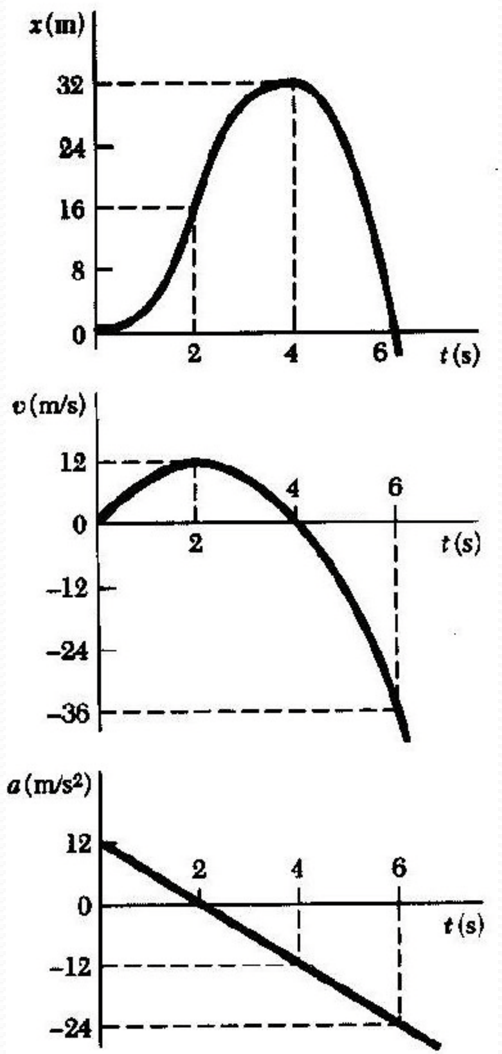
a.v>0 accelerating

- نماد گذاری مشتق ها

$$a = \ddot{x} \quad v = \dot{x}$$

$$if\ y = f(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = y'$$

مثال



حرکت از سکون با شتاب و سرعت مثبت تا ۲ ثانیه
بیشینه ی سرعت و شتاب صفر در ثانیه ی ۲
شتاب منفی، سرعت مثبت و کاهنده از ثانیه ی ۲ تا ۴
سرعت صفر، جابجایی بیشینه، شتاب منفی در ثانیه ی ۴
حرکت در جهت منفی، سرعت و شتاب منفی از ثانیه ی ۴ تا ۶
عبور از خط مبدا در ثانیه ی ۶

$$x(t) = 6t^2 - t^3$$

$$v(t) = 12t - 3t^2$$

$$a(t) = 12 - 6t$$

Analytical Integration

راه حل های تحلیلی

- شتاب را به صورت تابعی از زمان داشته باشیم $a=f(t)$
- شتاب را به صورت تابعی از جابجایی داشته باشیم $a=h(x)$
- شتاب را به صورت تابعی از سرعت داشته باشیم $a=g(v)$

شتاب را به صورت تابعی از زمان داشته باشیم a=f(t)

- سرعت بر حسب زمان:

$$a=\frac{dv}{dt}\Rightarrow dv=f(t)dt\Rightarrow\int_{v_1}^{v_2}dv=\int_{t_1}^{t_2}f(t)dt\Rightarrow v(t)\ \surd$$

- جابجایی بر حسب زمان:

$$v=\frac{dx}{dt}\Rightarrow dx=v(t)dt\Rightarrow\int_{x_1}^{x_2}dx=\int_{t_1}^{t_2}v(t)dt\Rightarrow x(t)\ \surd$$

شتاب را به صورت تابعی از جابجایی داشته باشیم a=h(x)

- سرعت بر حسب مکان:

$$adv = vdv \Rightarrow h(x)dx = vdv \Rightarrow \int_{x_1}^{x_2} h(x)dx = \int_{v_1}^{v_2} dv \Rightarrow v(x) \surd$$

- جابجایی بر حسب زمان:

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \int dt = \int \frac{dx}{v(x)} \Rightarrow x(t) \surd$$

- سرعت بر حسب زمان:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} \Rightarrow v(t) \surd$$

شتاب را به صورت تابعی از سرعت داشته باشیم a=g(v)

- سرعت بر حسب زمان:

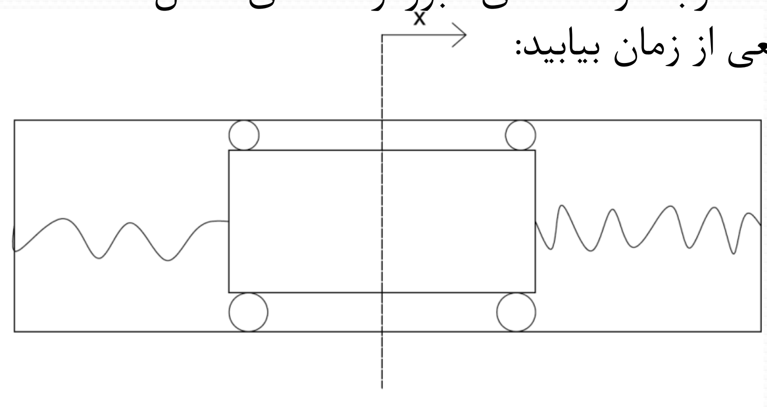
$$a = g(v) = \frac{dv}{dt} \Rightarrow \int dt = \int \frac{dv}{g(v)} \Rightarrow v(t) \surd$$

- سرعت بر حسب مکان:

$$vdv = adx \Rightarrow \int \frac{vdv}{g(v)} = \int dx \Rightarrow v(x) \surd$$

مثال

ارابه ای به دو فنر با سختی K متصل است، اگر سرعت ارابه در لحظه ی عبور از نقطه ی تعادل، داده شده باشد، سرعت و مکان ارابه را به صورت تابعی از زمان بیابید:



داده ها:

V(x=0)

مجهولات:

V(t) , X(t)

راه حل اول: استفاده از روابط تحلیلی

$$vdv = adx \Rightarrow \int vdv = \int (-k^2 x)dx + C \Rightarrow \frac{v^2}{2} = -\frac{k^2x^2}{2} + C$$

$$v(x=0) = v_0 \Rightarrow C = \frac{v_0^2}{2} \Rightarrow v = \sqrt{v_0^2 - k^2x^2}$$

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \int \frac{dx}{\sqrt{v_0^2 - k^2x^2}} = \int dt + A \Rightarrow \frac{1}{k}\sin^{-1}\frac{kx}{v_0} = t + A$$

$$x(t=0) = 0 \Rightarrow A = 0 \Rightarrow x = \frac{v_0}{k}\sin kt$$

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow v = v_0 \cos kt$$

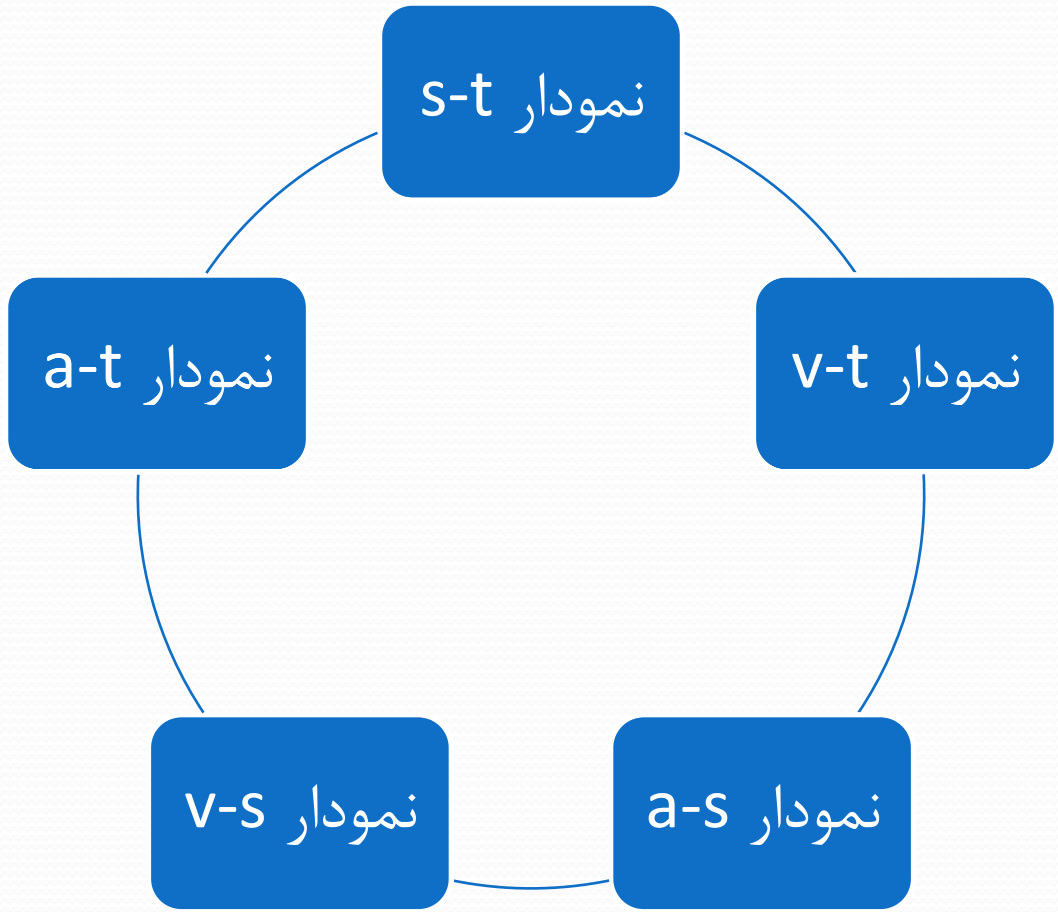
راه حل دوم: استفاده از معادلات دیفرانسیلی

$$\ddot{x} + k^2x = 0 \Rightarrow x = A\sin kt + B\cos kt \Rightarrow v = Ak\cos kt - Bk\sin kt$$

$$\begin{cases} x(t=0) = 0 \\ v(t=0) = v_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{v_0}{k} \\ B = 0 \end{cases}$$

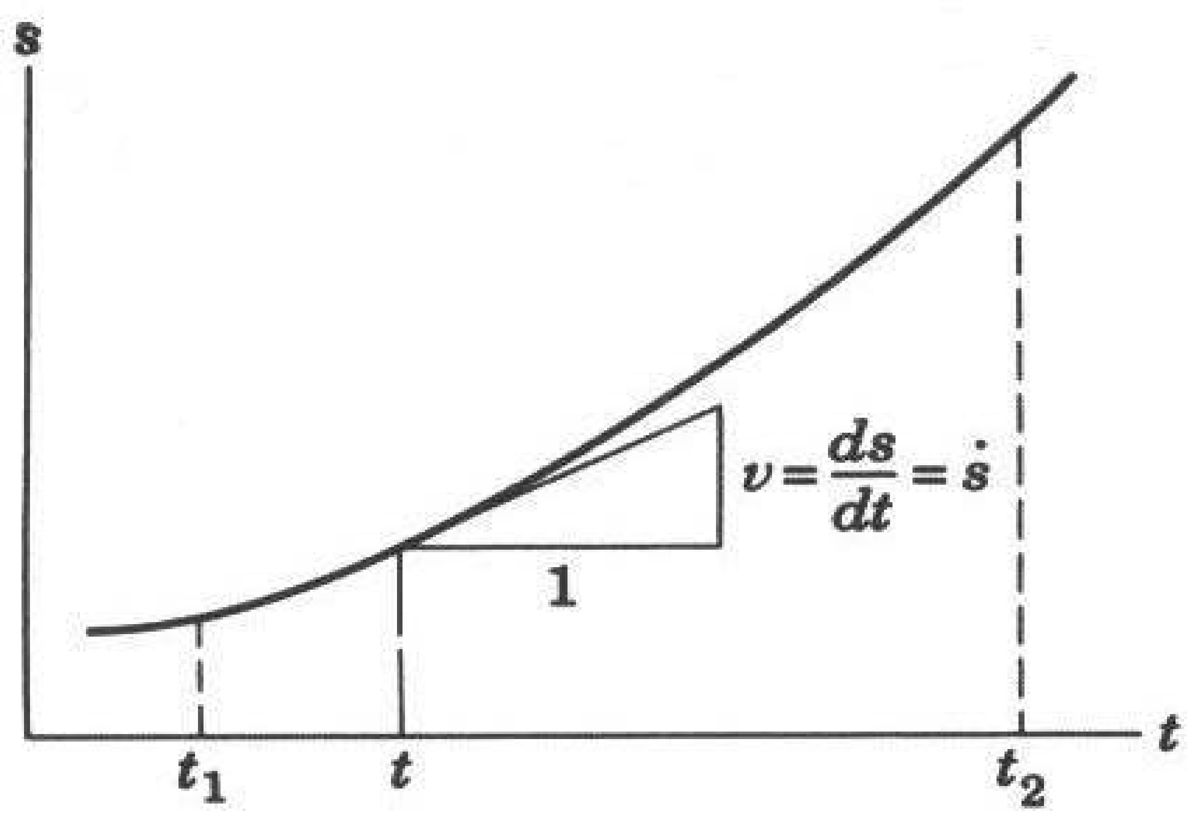
Graphical Interpretations

راه حل های گرافیکی



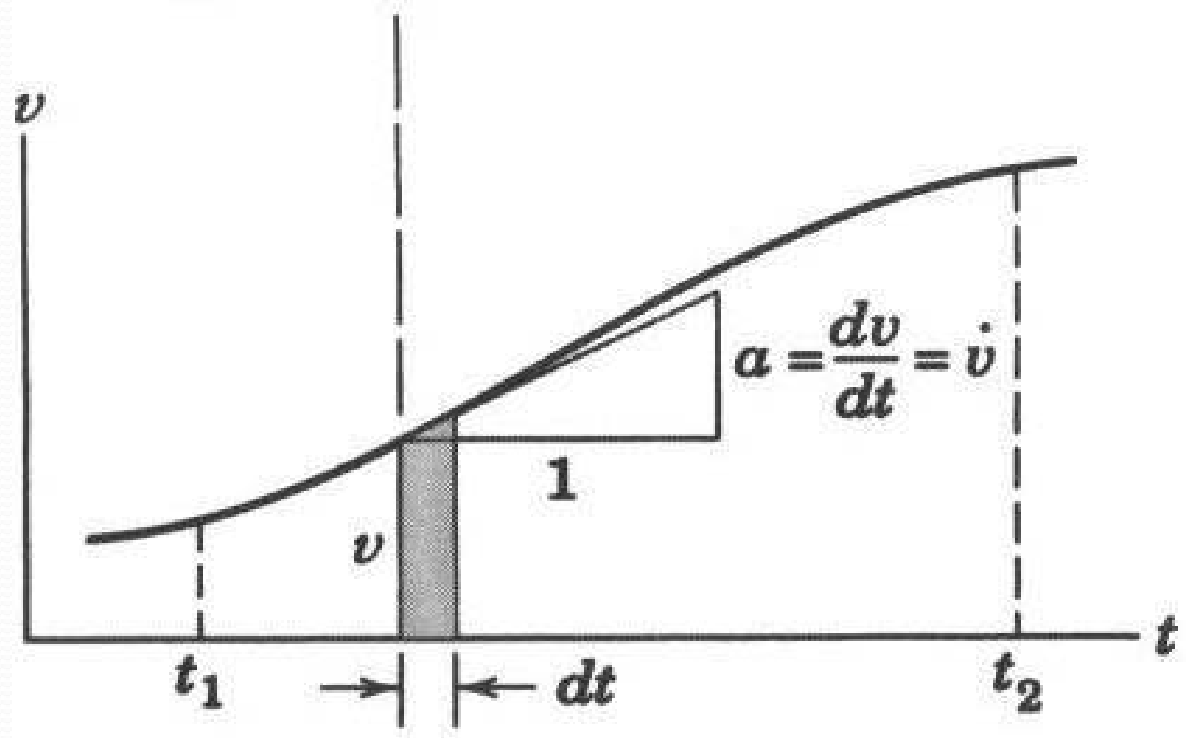
نمودار مکان-زمان s-t

- شیب نمودار مکان-زمان برابر سرعت ذره در آن لحظه می باشد:



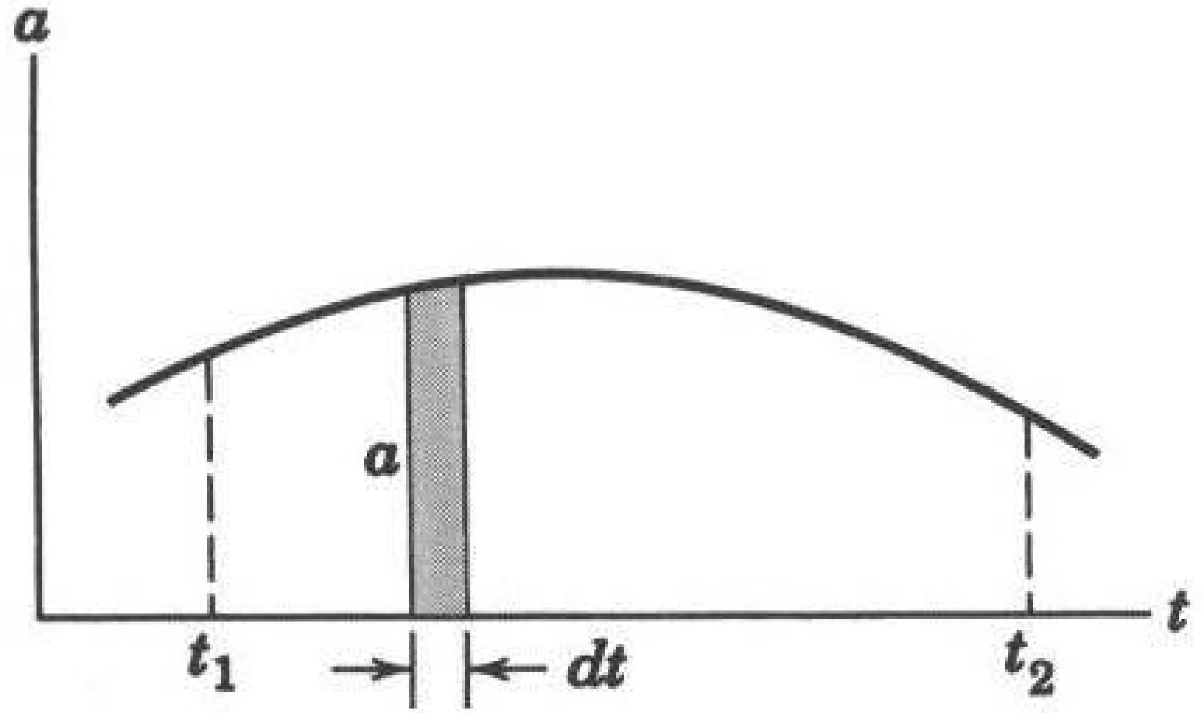
نمودار سرعت-زمان v-t

- شیب نمودار در لحظه، برابر شتاب در آن لحظه می باشد.
- مساحت سطح زیر نمودار در هر بازه ی زمانی برابر جابجایی ذره در آن بازه می باشد.

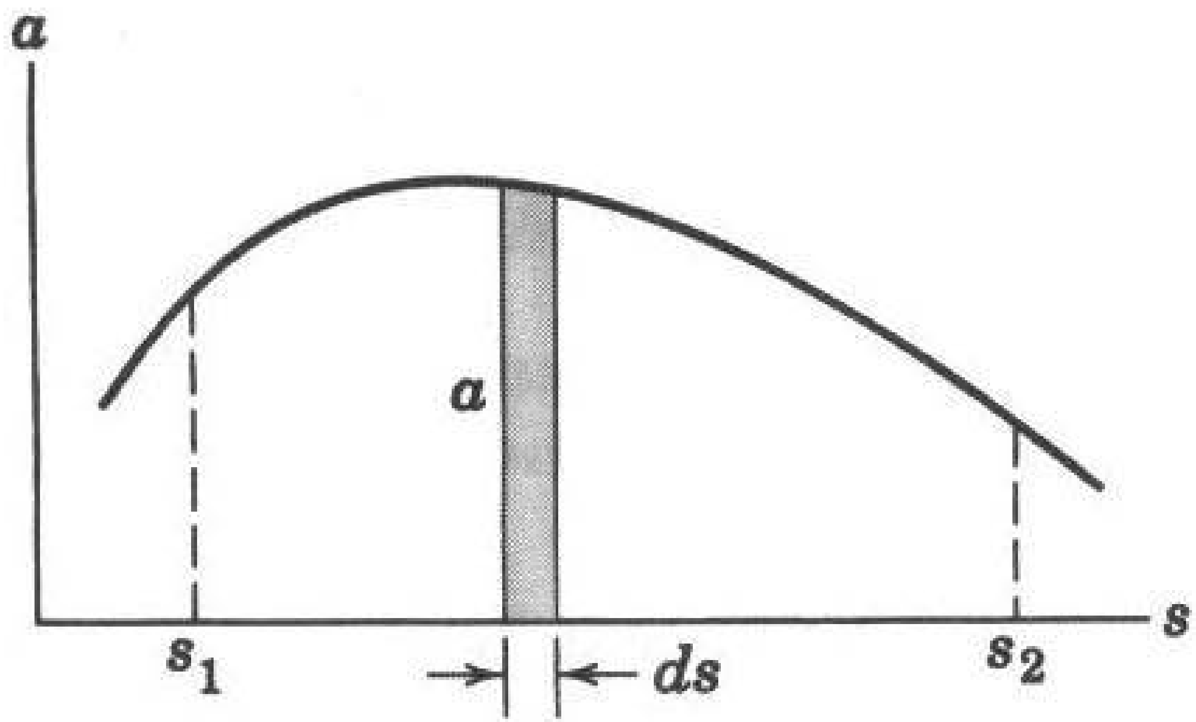


نمودار شتاب-زمان a-t

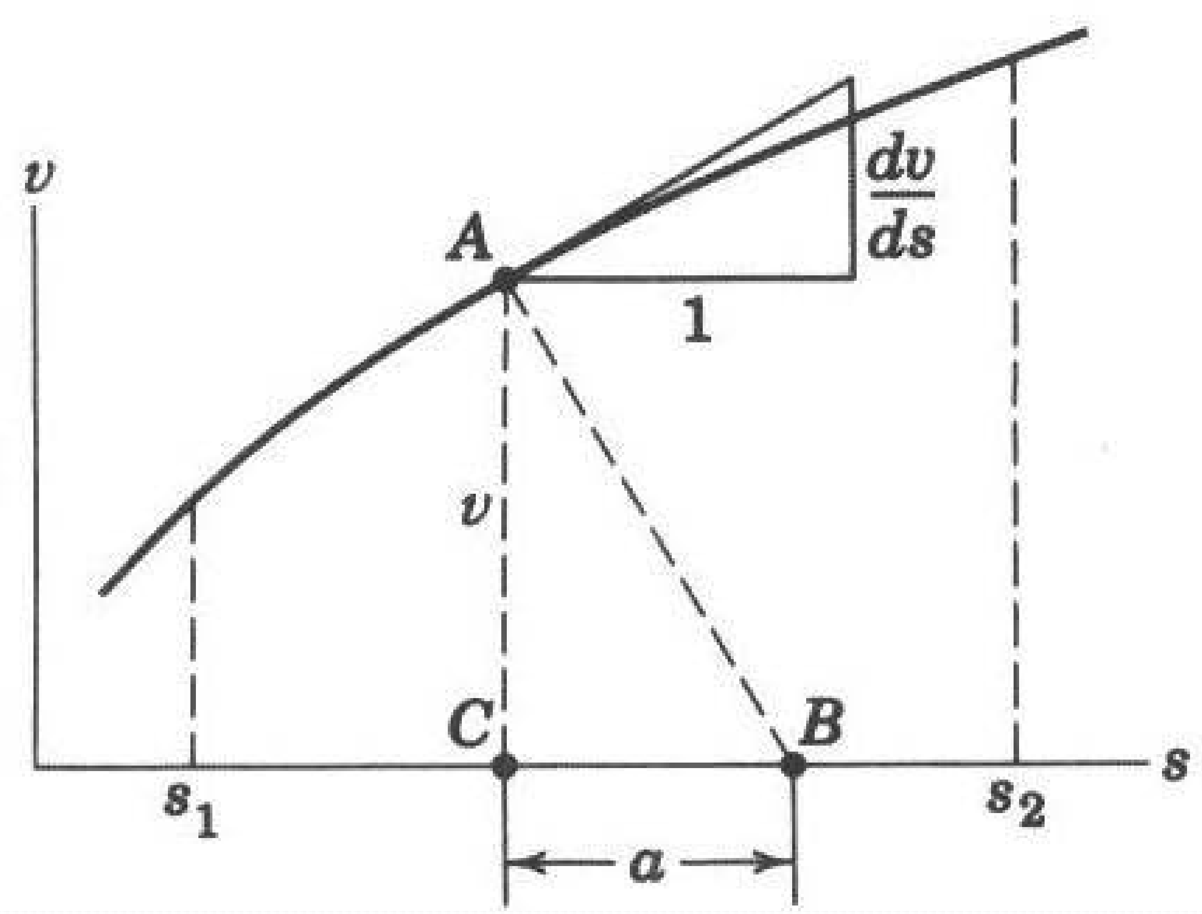
- مساحت سطح زیر نمودار در هر بازه ی زمانی، برابر تغییرات سرعت ذره در آن بازه می باشد.



نمودار شتاب-مکان a-s

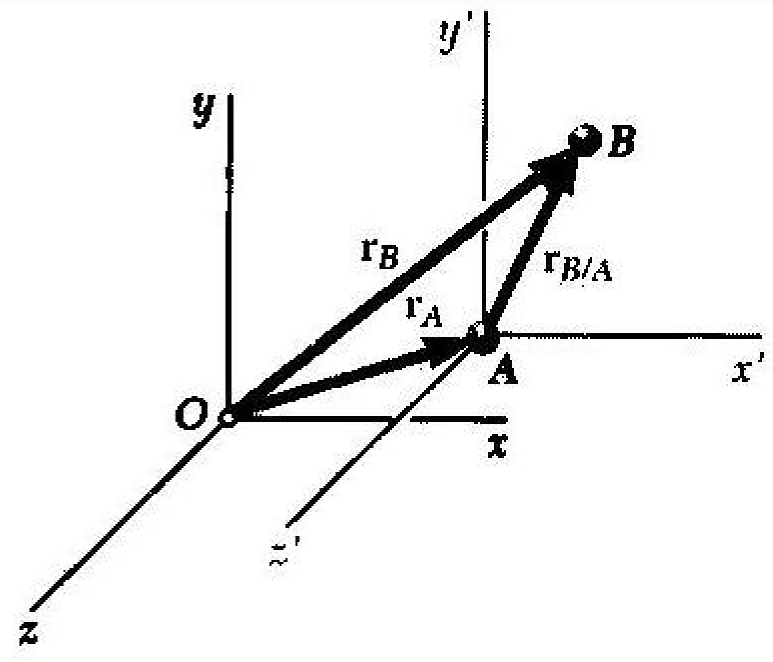


نمودار سرعت-مکان v-s



Relative Motion حرکت نسبی

- با فرض بر این که دو سیستم مختصات نسبت به هم تنها حرکات انتقالی دارند (Translating Axes) و نسبت به هم دوران نمی کنند روابط زیر نتیجه می شوند:



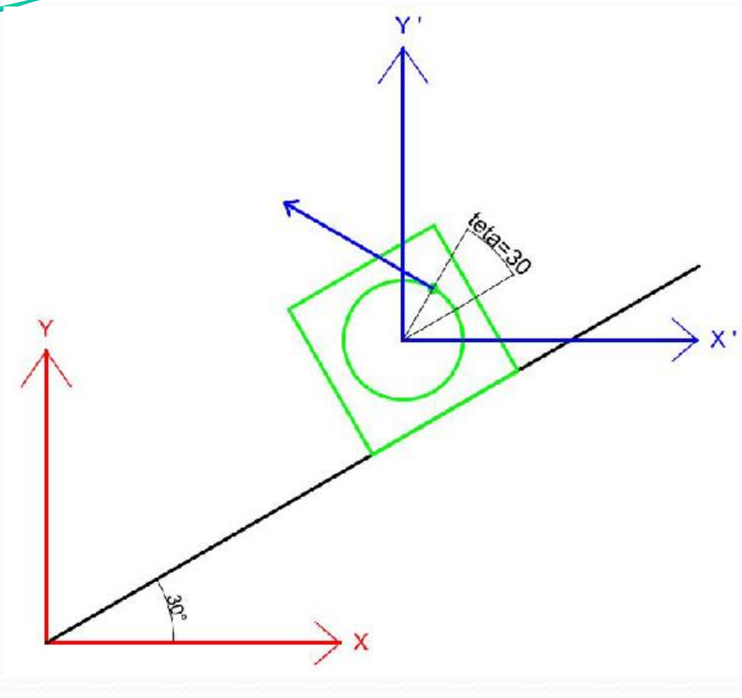
$$\overline{r_B} = \overline{r_A} + \overline{r_{B/A}}$$

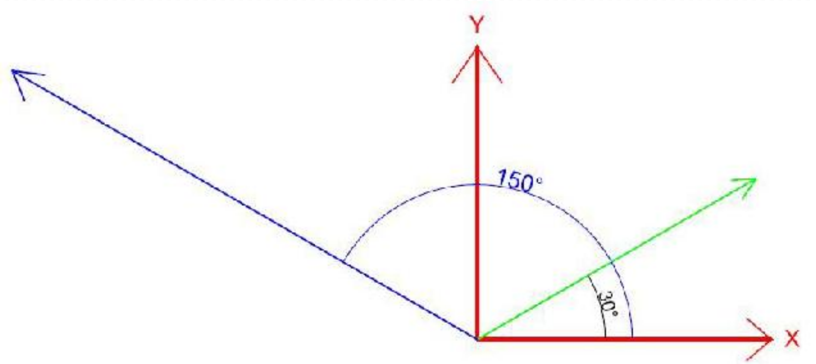
$$\overline{v_B} = \overline{v_A} + \overline{v_{B/A}}$$

$$\overline{a_B} = \overline{a_A} + \overline{a_{B/A}}$$

مثال

- بلوکی با سرعت ۱۲۰ متر بر ثانیه روی سطح شیبدار بالا می رود و گلوله ای با سرعت ۲۰۰ متر بر ثانیه در جهت خلاف عقربه های ساعت در آن می گردد.
- مقدار و امتداد گلوله را در حالت θ=30 بدست آورید.





$$\overrightarrow{v_P} = \overrightarrow{v_B} + \overrightarrow{v_{\frac{P}{B}}}$$

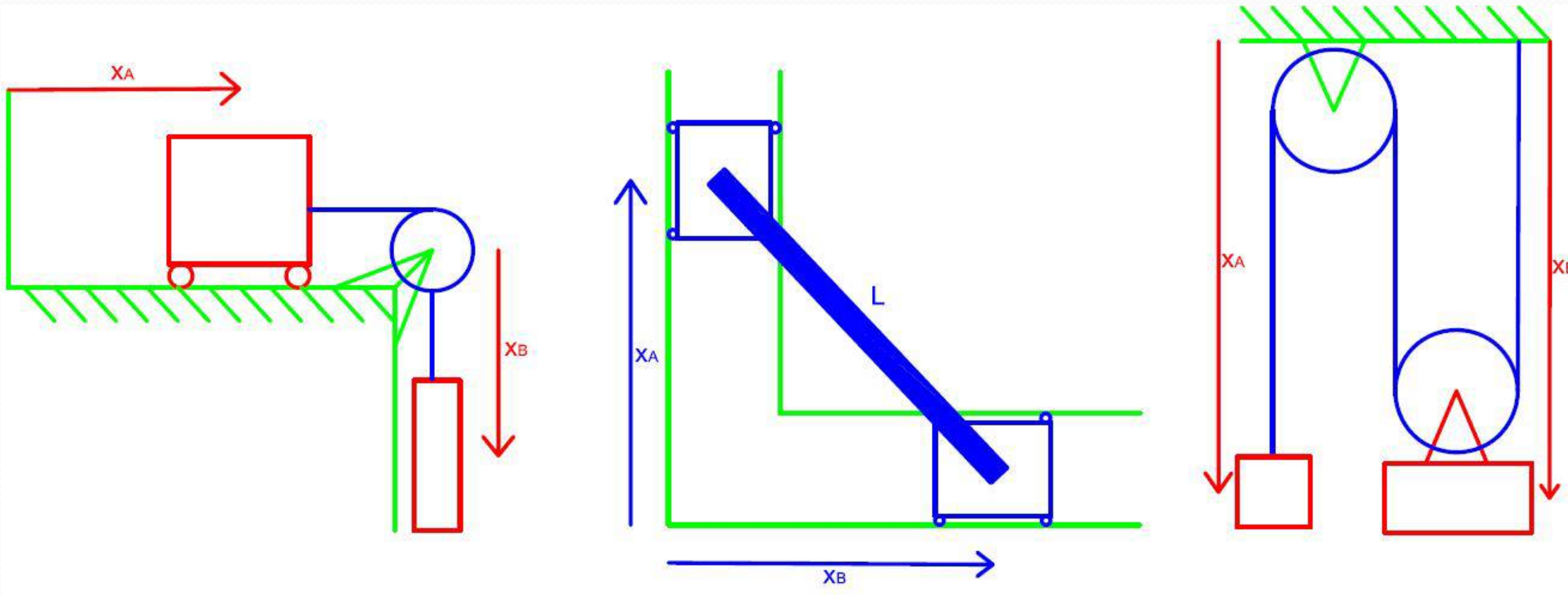
$$\overrightarrow{v_B} = 120\cos 30\,\hat{\imath} + 120\sin 30\,\hat{\jmath}$$

$$\overrightarrow{v_{\frac{P}{B}}} = -200\cos 30\,\hat{\imath} + 200\sin 30\,\hat{\jmath}$$

$$\overrightarrow{v_P} = -69.3\hat{\imath} + 160\hat{\jmath}$$

$$|\overrightarrow{v_P}| = 174.4\ m/s \quad 66.5° \nwarrow$$

Constrained Motion حرکات وابسته



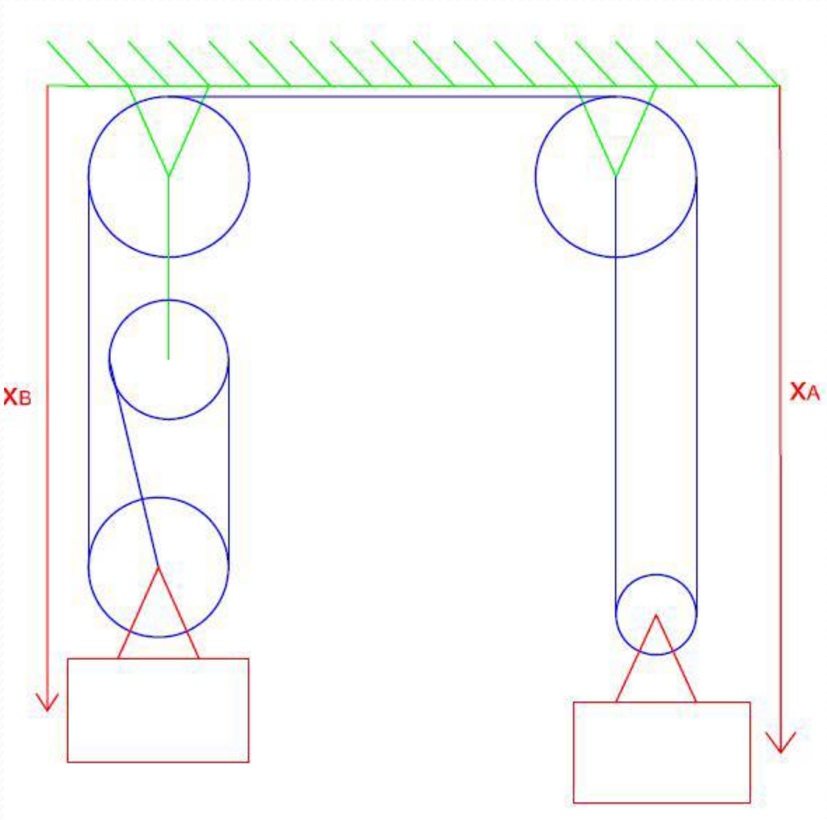
$\Delta x_A = \Delta x_B$

$x_A^2 + x_B^2 = L^2$

$\Delta x_A + 2\Delta x_B = Const.$

مثال

- سرعت ذره ی B را هنگامی که سرعت ذره ی A برابر 0.6 m/s به طرف پایین است، بدست آورید.



$$2\Delta x_A + 3\Delta x_B = Const.$$

$$2v_A + 3v_B = 0$$

$$v_B = -\frac{2}{3}v_A = -\frac{2}{3}(0.6) = -0.4\, m/s \Rightarrow v_B = 0.4 \uparrow$$

Curvilinear Motion of Particles حرکت ذرات بر مسیر منحنی

اگر بردار مکان ذره را با r نشان دهیم روابط زیر نتیجه می شوند:

$$\vec{\bar{v}} = \frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t}$$

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{dr}}{dt}$$

$$|\vec{v}| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$

$$\vec{\bar{a}} = \frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t}$$

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{dv}}{dt}$$

یادآوری روابط مشتق برداری

- اگر P و Q دو بردار باشند روابط زیر برقرار خواهند بود:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{P}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{P}(t+\Delta t) - \vec{P}(t)}{\Delta t}$$

$$\frac{d(\vec{P}+\vec{Q})}{dt} = \frac{d\vec{P}}{dt} + \frac{d\vec{Q}}{dt}$$

$$\frac{d(a\vec{P})}{dt} = a\frac{d\vec{P}}{dt} + \vec{P}\frac{da}{dt}$$

$$\frac{d(\vec{P}.\vec{Q})}{dt} = \frac{d\vec{P}}{dt}.\vec{Q} + \vec{P}.\frac{d\vec{Q}}{dt}$$

$$\frac{d(\vec{P}\times\vec{Q})}{dt} = \frac{d\vec{P}}{dt}\times\vec{Q} + \vec{P}\times\frac{d\vec{Q}}{dt}$$

Rectangular Coordinates سیستم مختصات کارتزین

- اگر موقعیت ذره در فضا را با سه مولفه ی x,y,z مشخص کنیم خواهیم داشت:

$$\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{x}\hat{\imath} + \dot{y}\hat{\jmath} + \dot{z}\hat{k}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{x}\hat{\imath} + \ddot{y}\hat{\jmath} + \ddot{z}\hat{k}$$

- در سیستم مختصات دو بعدی تنها جمله ی سوم حذف می شود.

Projectile Motion حرکت پرتابه

- در این بخش به ارائه ی خلاصه ی روابط اکتفا می شود:

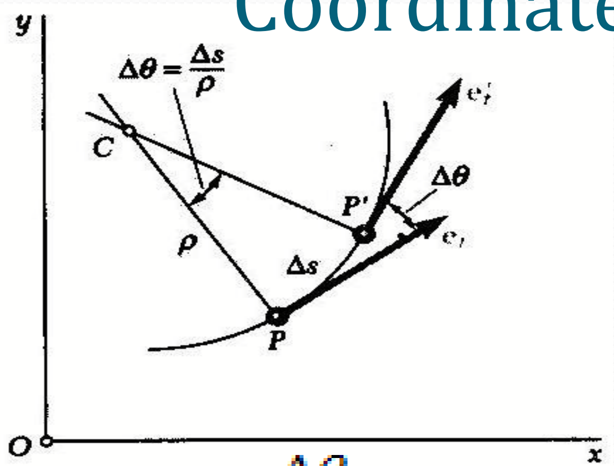
$$a_x = 0 \qquad a_y = -g$$

$$v_x = (v_x)_0 \qquad v_y = (v_y)_0 - gt$$

$$x = x_0 + (v_x)_0 t \qquad y = y_0 + (v_y)_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$v_y^2 = (v_y)_0^2 - 2g(y - y_0)$$

Normal and Tangential Coordinates سیستم مختصات n-t



- بردار یکه ی et را مماس و هم جهت با راستای حرکت و بردار یکه ی en را عمود بر این راستا و در جهت مرکز دوران تعریف کرده و پس از بدست آوردن رابطه ی بین این دو، بردار های سرعت و شتاب را بر اساس آن ها تعریف می کنیم:

$$\lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta\theta}{2}}{\Delta\theta} = \lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta\theta}{2}}{\frac{\Delta\theta}{2}} = 1$$

بردار یکه $\Rightarrow \hat{e_n} = \lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{\Delta\hat{e_t}}{\Delta\theta} = \frac{d\hat{e_t}}{d\theta}$

$$\vec{v} = v\hat{e_t}$$

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{\rho d\theta}{dt} = \rho\dot{\theta}$$

$$\begin{cases} \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(v\hat{e_t})}{dt} = \frac{dv}{dt}\hat{e_t} + v\frac{d\hat{e_t}}{dt} \\ \frac{d\hat{e_t}}{dt} = \frac{d\hat{e_t}}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} = \hat{e_n}\cdot\frac{1}{\rho}\cdot v \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{a} = \frac{dv}{dt}\hat{e_t} + \frac{v^2}{\rho}\hat{e_n}$$

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d(\rho\dot{\theta})}{dt} = \dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta}$$

$$a_n = \rho\dot{\theta}^2$$

Normal and Tangential Coordinates

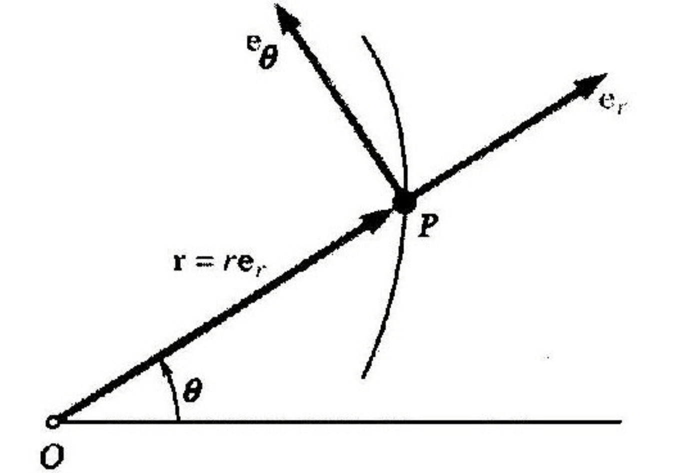
سیستم مختصات n-t

خلاصه ی روابط

$$\vec{v} = (\rho\dot{\theta})\widehat{e_t}$$

$$\begin{cases} a_t = \dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta} \\ a_n = \rho\dot{\theta}^2 \end{cases} \Rightarrow \vec{a} = (\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\widehat{e_t} + (\rho\dot{\theta}^2)\widehat{e_n}$$

Polar Coordinates سیستم مختصات قطبیr-θ

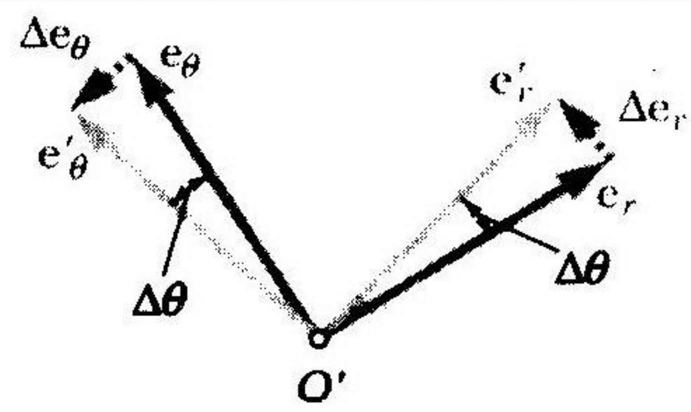


- بردارهای یکه ی er و eθ را مطابق شکل مقابل تعریف می کنیم:
- با روابط هندسی مشتق بردار های یکه نسبت به تغییرات زاویه بدست می آید:

$$\frac{d\hat{e_r}}{d\theta} = \hat{e_\theta}$$

$$\frac{d\hat{e_\theta}}{d\theta} = -\hat{e_r}$$

- مشتق زمانی بردار های یکه با کمک قاعده ی زنجیره ای نتیجه می شود:



$$\dot{\hat{e_r}} = \frac{d\hat{e_r}}{dt} = \frac{d\hat{e_r}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \dot{\hat{e_r}} = \dot{\theta}\hat{e_\theta}$$

$$\dot{\hat{e_\theta}} = \frac{d\hat{e_\theta}}{dt} = \frac{d\hat{e_\theta}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \dot{\hat{e_\theta}} = -\dot{\theta}\hat{e_r}$$

Polar Coordinates سیستم مختصات قطبی r-θ

- روابط سرعت و شتاب:

$$\vec{r} = r\hat{e_r}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d(r\hat{e_r})}{dt} = \dot{r}\hat{e_r} + r\dot{\theta}\hat{e_\theta}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{r}\hat{e_r} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{e_\theta} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{e_\theta} + r\ddot{\theta}\hat{e_\theta} - r\dot{\theta}^2\hat{e_r}$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{e_r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{e_\theta}$$

حالت خاص در سیستم مختصات (r-θ) & (n-t)

- اگر مسیر حرکت ذره به صورت دایره باشد روابط شتاب به صورت زیر ساده می شوند:

$$r = \rho = Const.$$

$$\dot{\rho} = \ddot{\rho} = 0$$

$$a_n = \rho\dot{\theta}^2$$

$$a_t = \rho\ddot{\theta}$$

$$r = Const.$$

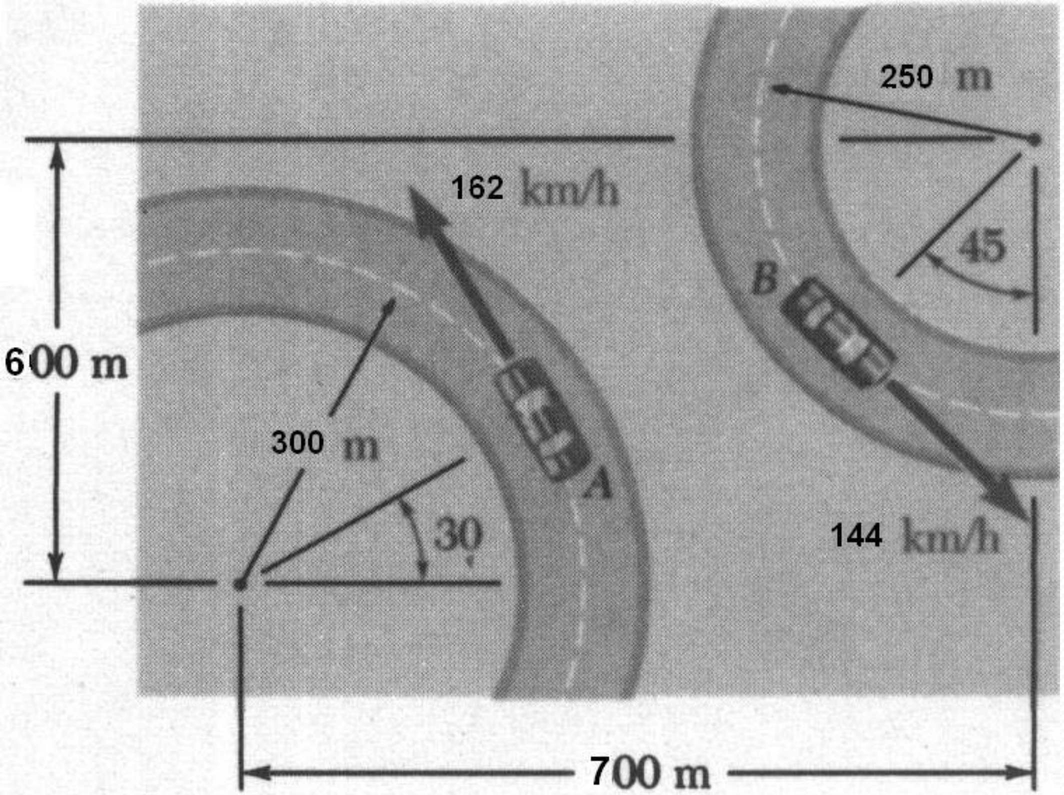
$$\dot{r} = \ddot{r} = 0$$

$$a_r = r\dot{\theta}^2$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta}$$

- روابط فوق نشان دهنده ی برابر بودن دو سیستم مختصات برای حرکت دایره ای می باشند.

مثال



- در شکل نشان داده شده، از سرعت خودرو A با شتاب ۷ متر بر مجذور ثانیه کاسته شده و به سرعت خودروی B با شتاب ۲ متر بر مجذور ثانیه افزوده می شود. مطلوب است سرعت نسبی دو خودرو.

$$\begin{cases} 162km/h \rightarrow 45m/s \Rightarrow \overrightarrow{v_A} = -45\sin 30\,\hat{\imath} + 45\cos 30\,\hat{\jmath} \\ 144km/h \rightarrow 40m/s \Rightarrow \overrightarrow{v_A} = 40\cos 45\,\hat{\imath} - 40\sin 45\,\hat{\jmath} \end{cases}$$

$$\overrightarrow{v_{B/A}} = \overrightarrow{v_B} - \overrightarrow{v_A} = 50.76\hat{\imath} - 67.26\hat{\jmath}$$

$$\left|\overrightarrow{v_{B/A}}\right| = 84.28\,m/s \;\; 52.9° \searrow$$

مثال

- در مثال قبل مطلوب است شتاب نسبی دو خودرو.

$$Car\ A:\begin{cases} a_t=-7\dfrac{m}{s^2}=7\sin 30\,\hat{\imath}-7\cos 30\,\hat{\jmath} \\ a_n=\dfrac{v_A^2}{\rho}=\dfrac{45^2}{300}=6.75\,\dfrac{m}{s^2}=-6.75\cos 30\,\hat{\imath}-6.75\sin 30\,\hat{\jmath} \end{cases}$$

$$Car\ B:\begin{cases} a_t=2\,\dfrac{m}{s^2}=2\sin 45\,\hat{\imath}-2\cos 45\,\hat{\jmath} \\ a_n=\dfrac{v_B^2}{\rho}=\dfrac{40^2}{250}=6.4\dfrac{m}{s^2}=6.4\cos 45\,\hat{\imath}+6.4\sin 45\,\hat{\jmath} \end{cases}$$

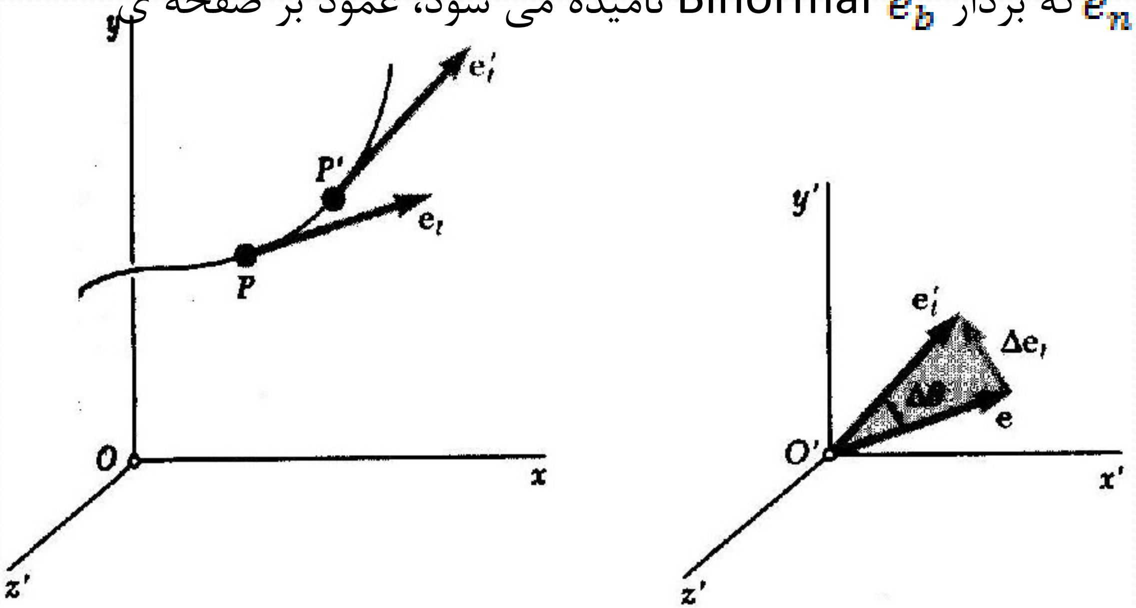
$$\overrightarrow{a_{B/A}}=\overrightarrow{a_B}-\overrightarrow{a_A}=(5.74\hat{\imath}-3.0\hat{\jmath})-(-2.35\hat{\imath}-9.49\hat{\jmath})=8.29\hat{\imath}+12.55\hat{\jmath}$$

$$\left|\overrightarrow{a_{B/A}}\right|=15.04\ m/s^2 56.55^\circ\ \nearrow$$

Motion of a Particle in Space

حرکت ذره در فضا

- صفحه ای که از نقطه ی P گذشته و موازی بردارهای $\hat{e}_t$ و $\hat{e}_t'$ باشد در نظر می گیریم.
- این صفحه شامل مماس بر مسیر حرکت در نقطه P و موازی مماس در نقطه ی P’ بوده که به دنبال نزدیک شدن حدی این دو نقطه شامل $\hat{e}_n$ خواهد شد.
- صفحه ی مذکور صفحه ی بوسان(Osculating Plane) نامیده می شود.
- بردار حاصل ضرب خارجی $\hat{e}_t$ و $\hat{e}_n$ که بردار $\hat{e}_b$ Binormal نامیده می شود، عمود بر صفحه ی بوسان می باشد.



سیستم مختصات استوانه ای Cylindrical Coordinates

- اگر بردار P در دو دستگاه مختصات محلی و جهانی که نسبت به هم دوران می کنند سنجیده شود، رابطه ی زیر بین مشتق زمانی این بردار در دو دستگاه برقرار خواهد بود.

$$\left(\frac{d\vec{P}}{dt}\right)_{Global} = \left(\frac{d\vec{P}}{dt}\right)_{Local} + \vec{\omega} \times \vec{P}$$

- از آنجایی که بردار های پایه(یکه) در سیستم مختصات استوانه ای نسبت به یک مرجع لخت دوران می کنند، از رابطه ی فوق جهت محاسبه ی مشتق زمانی این بردار های یکه استفاده می کنیم:

$$\vec{\omega} = \dot{\theta}\,\hat{e_z}$$

$$\left(\frac{d\hat{e}}{dt}\right)_{Local} = 0$$

$$\begin{cases} \dot{\hat{e_r}} = \vec{\omega} \times \hat{e_r} = \dot{\theta}\,\hat{e_\theta} \\ \dot{\hat{e_z}} = \vec{\omega} \times \hat{e_z} = 0 \\ \dot{\hat{e_\theta}} = \vec{\omega} \times \hat{e_\theta} = -\dot{\theta}\,\hat{e_r} \end{cases}$$

Cylindrical Coordinates سیستم مختصات استوانه ای

- با استفاده از روابطی که برای مشتق زمانی بردارهای یکه ی سیستم مختصات استوانه ای بدست آوردیم، بردار های سرعت و شتاب را محاسبه می کنیم:

$$\vec{r} = r\,\hat{e}_r + z\,\hat{e}_z$$

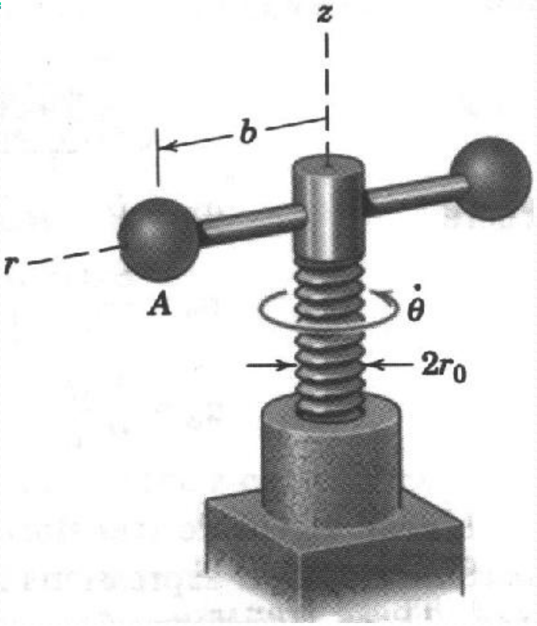
$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r}\,\hat{e}_r + r\,\dot{\hat{e}}_r + \dot{z}\,\hat{e}_z + z\,\dot{\hat{e}}_z$$

$$\vec{v} = \dot{r}\,\hat{e}_r + r\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta + \dot{z}\,\hat{e}_z$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{r}\,\hat{e}_r + \dot{r}\,\dot{\hat{e}}_r + \dot{r}\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta + r\ddot{\theta}\,\hat{e}_\theta + r\dot{\theta}\,\dot{\hat{e}}_\theta + \dot{z}\,\hat{e}_z + z\,\dot{\hat{e}}_z$$

$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\hat{e}_r + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\hat{e}_\theta + \ddot{z}\,\hat{e}_z$$

مثال



- پیچ نشان داده شده در شکل، از حال سکون شروع به حرکت کرده، اگر سرعت دورانی پیچ به صورت $\dot{\theta} = kt$ باشد(K ثابت)، در لحظه ای که پیچ یک دور کامل زده است، شتاب و سرعت مرکز گوی A را بدست آورید. (گام پیچ L می باشد.)

پاسخ

$$\dot{\theta} = kt \longrightarrow \theta = \int \dot{\theta}\, dt = \frac{1}{2}kt^2 \rightarrow 2\pi = \frac{1}{2}kt^2 \rightarrow t = 2\sqrt{\frac{\pi}{k}}$$

$$\dot{\theta} = kt = k\left(2\sqrt{\frac{\pi}{k}}\right) = 2\sqrt{\pi k}$$

$$\tan\gamma = \frac{L}{2\pi b} \qquad \begin{cases} v_\theta = v\cos\gamma \\ v_\theta = r\dot{\theta} = b\dot{\theta} \end{cases} \Rightarrow \quad v = \frac{v_\theta}{\cos\gamma} = \frac{b\dot{\theta}}{\cos\gamma}$$

$$\begin{cases} \dot{\theta} = 2\sqrt{\pi k} \\ \cos\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2\gamma}} = \dfrac{2\pi b}{\sqrt{L^2+4\pi^2 b^2}} \end{cases} \qquad v = 2b\sqrt{\pi k}\frac{\sqrt{L^2+4\pi^2b^2}}{2\pi b} = \sqrt{\frac{k}{\pi}}\sqrt{L^2+4\pi^2b^2}$$

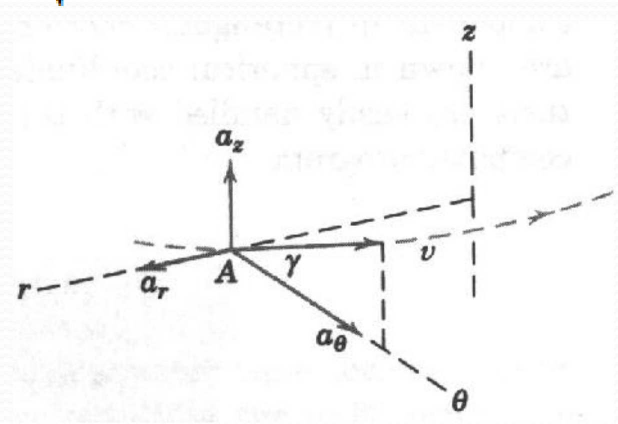
$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = 0 - b\left(2\sqrt{\pi k}\right)^2 = -4b\pi k$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = bk + 2(0)\left(2\sqrt{\pi k}\right) = bk$$

$$a_z = \ddot{z} = \frac{d}{dt}(v_z) = \frac{d}{dt}(v_\theta \tan\gamma) = \frac{d}{dt}\left(b\dot{\theta}\tan\gamma\right) = (b\tan\gamma)\ddot{\theta}$$

$$a_z = (b\tan\gamma)\ddot{\theta} = b\frac{L}{2\pi b}k = \frac{kL}{2\pi}$$

$$a = \sqrt{(-4b\pi k)^2 + (bk)^2 + \left(\frac{kL}{2\pi}\right)^2}$$



سیستم مختصات کروی

Spherical Coordinates

- همانند روشی که در سیستم مختصات استوانه ای بیان شد، ابتدا مشتق زمانی بردارهای پایه را محاسبه می کنیم:

$$\begin{cases} \vec{\omega} = \dot{\varphi}\widehat{e_\theta} + \dot{\theta}\widehat{e_z} \\ \widehat{e_z} = \cos\varphi\,\widehat{e_R} - \sin\varphi\,\widehat{e_\varphi} \end{cases} \Rightarrow \vec{\omega} = \dot{\varphi}\widehat{e_\theta} + \dot{\theta}\cos\varphi\,\widehat{e_R} - \dot{\theta}\sin\varphi\,\widehat{e_\varphi}$$

$$\begin{cases} \dot{\widehat{e_R}} = \vec{\omega} \times \widehat{e_R} = \begin{vmatrix} \widehat{e_R} & \widehat{e_\varphi} & \widehat{e_\theta} \\ \dot{\theta}\cos\varphi & -\dot{\theta}\sin\varphi & \dot{\varphi} \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \dot{\varphi}\widehat{e_\varphi} + \dot{\theta}\sin\varphi\,\widehat{e_\theta} \\ \dot{\widehat{e_\varphi}} = \vec{\omega} \times \widehat{e_\varphi} = \begin{vmatrix} \widehat{e_R} & \widehat{e_\varphi} & \widehat{e_\theta} \\ \dot{\theta}\cos\varphi & -\dot{\theta}\sin\varphi & \dot{\varphi} \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\dot{\varphi}\widehat{e_R} + \dot{\theta}\cos\varphi\,\widehat{e_\theta} \\ \dot{\widehat{e_\theta}} = \vec{\omega} \times \widehat{e_\theta} = \begin{vmatrix} \widehat{e_R} & \widehat{e_\varphi} & \widehat{e_\theta} \\ \dot{\theta}\cos\varphi & -\dot{\theta}\sin\varphi & \dot{\varphi} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\dot{\theta}\sin\varphi\,\widehat{e_R} - \dot{\theta}\cos\varphi\,\widehat{e_\varphi} \end{cases}$$

Spherical Coordinates سیستم مختصات کروی

- با استفاده از مشتق زمانی بردارهای پایه در سیستم مختصات کروی، روابط بردارهای سرعت و شتاب به شکل زیر نتیجه می شوند:

$$\vec{R} = R\widehat{e_R}$$

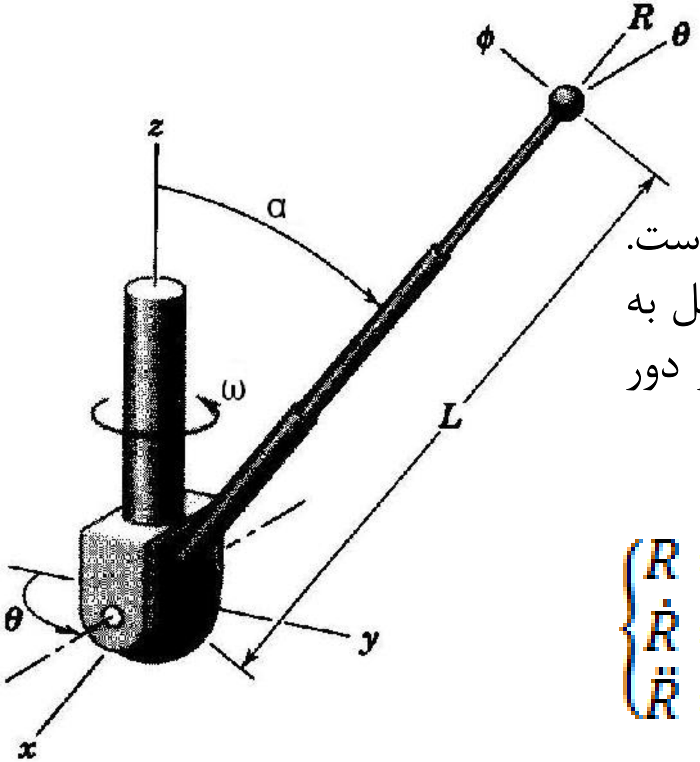
$$\vec{v} = \frac{d\vec{R}}{dt} = \dot{R}\widehat{e_R} + R\dot{\widehat{e_R}}$$

$$\vec{v} = \dot{R}\widehat{e_R} + R\dot{\varphi}\widehat{e_\varphi} + R\dot{\theta}\sin\varphi\,\widehat{e_\theta}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left(\ddot{R}\widehat{e_R} + \dot{R}\dot{\widehat{e_R}}\right) + \left(\dot{R}\dot{\varphi}\widehat{e_\varphi} + R\ddot{\varphi}\widehat{e_\varphi} + R\dot{\varphi}\dot{\widehat{e_\varphi}}\right) + \left(\dot{R}\dot{\theta}\sin\varphi\,\widehat{e_\theta} + R\ddot{\theta}\sin\varphi\,\widehat{e_\theta} + R\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\varphi\,\widehat{e_\theta} + R\dot{\theta}\sin\varphi\,\dot{\widehat{e_\theta}}\right)$$

$$\vec{a} = \left(\ddot{R} - R\dot{\varphi}^2 - R\dot{\theta}^2\sin^2\varphi\right)\widehat{e_R} + \left(R\ddot{\varphi} + 2\dot{R}\dot{\varphi} - R\dot{\theta}^2\sin\varphi\cos\varphi\right)\widehat{e_\varphi} + \left(R\ddot{\theta}\sin\varphi + 2\dot{R}\dot{\theta}\sin\varphi + 2R\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\varphi\right)\widehat{e_\theta}$$

مثال



- لوله ی آنتنی با زاویه ی α به میله ی قائمی متصل شده است. میله ی قائم با سرعت زاویه ای ω می چرخد. گلوله ی متصل به انتهای آنتن ضمن باز شدن آنتن با سرعت ثابت v از مرکز دور می شود، سرعت و شتاب مطلق گلوله را بدست آورید.

$$\begin{cases} R = L \\ \dot{R} = v \\ \ddot{R} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{\theta} = \omega \\ \ddot{\theta} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \varphi = \alpha \\ \dot{\varphi} = 0 \end{cases}$$

$$\vec{v} = v\widehat{e_R} + L\omega \sin\alpha\, \widehat{e_\theta} \qquad |\vec{v}| = \sqrt{v^2 + L^2\omega^2 \sin^2\alpha}$$

$$\vec{a} = -L\omega^2 \sin^2\alpha\, \widehat{e_R} - L\omega^2 \sin\alpha \cos\alpha\, \widehat{e_\varphi} + 2v\omega \sin\alpha\, \widehat{e_\theta}$$

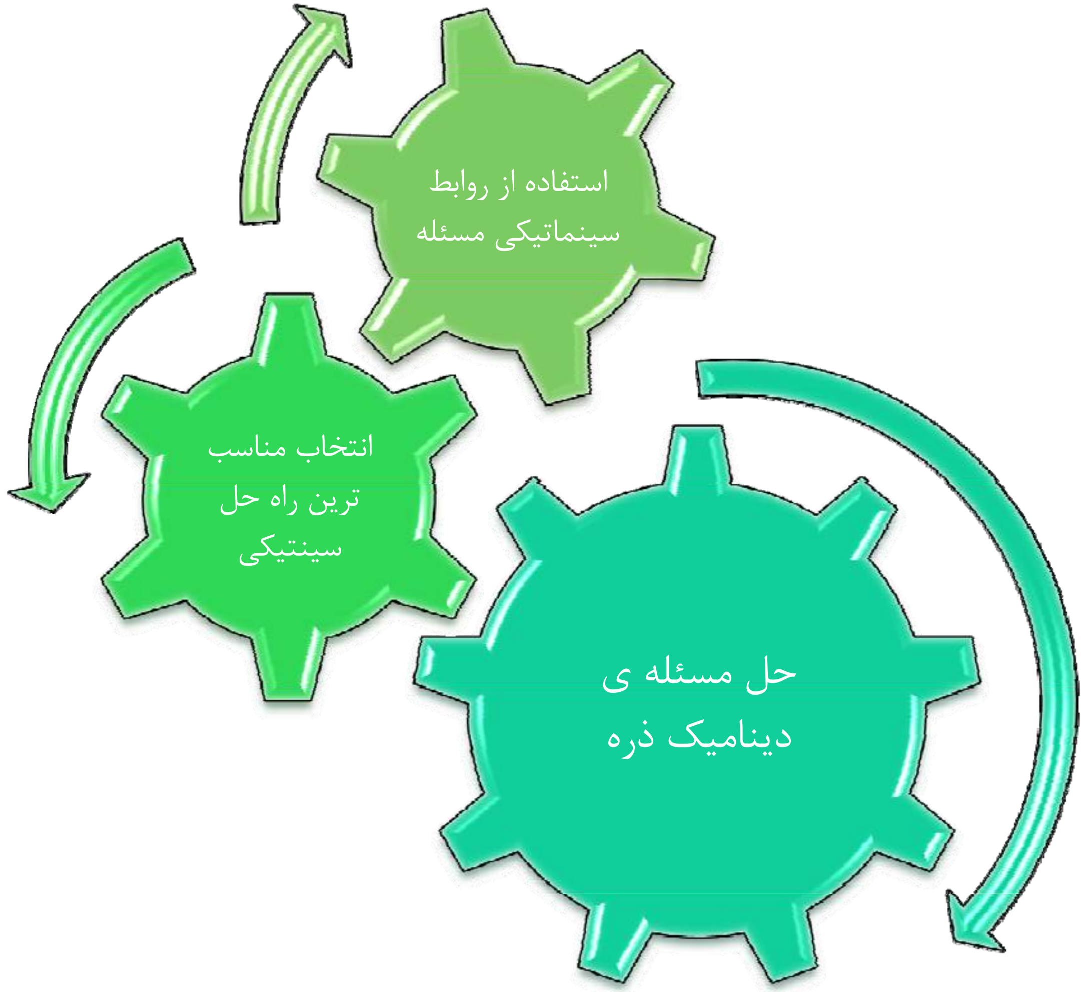
$$|\vec{a}| = \omega \sin\alpha \sqrt{L^2\omega^2 \sin^2\alpha + L^2\omega^2 \cos^2\alpha + 4v^2}$$

Kinetics of Particles — سینتیک ذرات

فصل ۳

- نیرو، جرم و شتاب
  - بیان نیرویی قانون دوم نیوتن
    - اعمال قانون دوم نیوتن در هر راستا
    - تعادل دینامیکی یا اصل دآلانبر
  - کاربرد قانون دوم نیوتن در سیستم های مختصات
    - سیستم مختصات کارتزین
    - سیستم مختصات قطبی
    - سیستم مختصات مماسی و محوری
  - حرکت وابسته و مقید
  - حرکت نسبی
- اندازه حرکت و تکانه
  - اندازه حرکت خطی و بیان دیگر قانون دوم نیوتن
    - بقای اندازه حرکت خطی
  - اندازه حکت زاویه ای
    - بقای اندازه حرکت زاویه ای و حرکت تحت نیروی مرکزی
  - تکانه و نیروهای ضربه ای
- برخورد
  - برخورد مرکزی مستقیم
  - برخورد مرکزی مایل
- کار و انرژی
  - کار
  - اصل کار و انرژی
    - انرژی جنبشی
  - توان و بازدهی
  - انرژی های پتانسیل
  - نیرو های پایستار
    - قانون بقای انرژی

Solution of Problems روش حل مسائل



Solution of Problems روش حل مسائل

Newton’s Second Law قانون دوم نیوتن(بیان نیرویی)

- اگر برآیند نیروهای وارد به یک ذره صفر نباشد، این ذره شتابی خواهد گرفت که متناسب با مقدار و جهت برآیند نیروهای وارد به آن است.

$$\frac{F_1}{a_1}=\frac{F_2}{a_2}=\frac{F_3}{a_3}=\cdots=Const.$$

- مقدار ثابت فوق یک مشخصه ی ذره بوده که جرم نامیده می شود:

$$\sum F=ma$$

کاربرد بیان نیرویی قانون دوم نیوتن در حل مسائل

رسم دیاگرام آزاد ذره و دیاگرام نیرو های موثر و معادل قرادادن دو دیاگرام

استفاده از تعادل دینامیکی

Equations of Motion (Rectangular Components)

معادلات حرکت در سیستم مختصات کارتزین

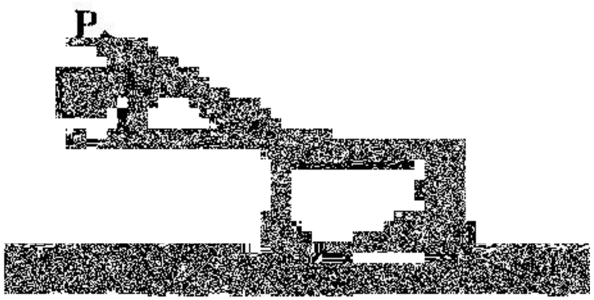
$$\sum \vec{F} = \sum F_x \hat{i} + \sum F_y \hat{j} + \sum F_z \hat{k}$$

$$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \ddot{k}$$

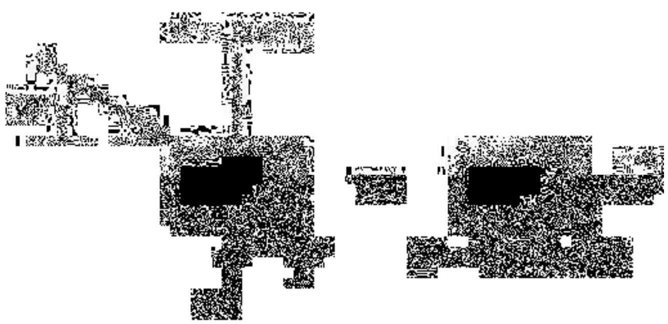
$$\sum F = ma \Rightarrow \begin{cases} \sum F_x = ma_x = m\ddot{x} \\ \sum F_y = ma_y = m\ddot{y} \\ \sum F_z = ma_z = m\ddot{z} \end{cases}$$

مثال

- یک بلوک ۲۰۰ پوندی بر روی سطح افقی قرار دارد، مقدار نیروی P را طوری تعیین کنید که بلوک شتاب ۱۰ فوت بر مجذور ثانیه بگیرد، ضریب اصطکاک جنبشی ۰.۲۵ می باشد.



$$m = \frac{W}{g} = \frac{200lb}{32.2\,ft/s^2} = 6.21\,lb.s^2/ft$$



$$\sum F_x = ma \Rightarrow P\cos 30 - F = 6.21 \times 10$$
$$\Rightarrow P\cos 30 - 0.25N = 62.1\ (1)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N - P\sin 30 - 200 = 0$$
$$\Rightarrow N = P\sin 30 + 200\ (2)$$

$$(1)\&(2) \Rightarrow P\cos 30 - 0.25(P\sin 30 + 200) = 62.1 \Rightarrow P = 151\,lb$$

Equations of Motion (Tangential & Normal Components)

معادلات حرکت در سیستم مختصات n-t

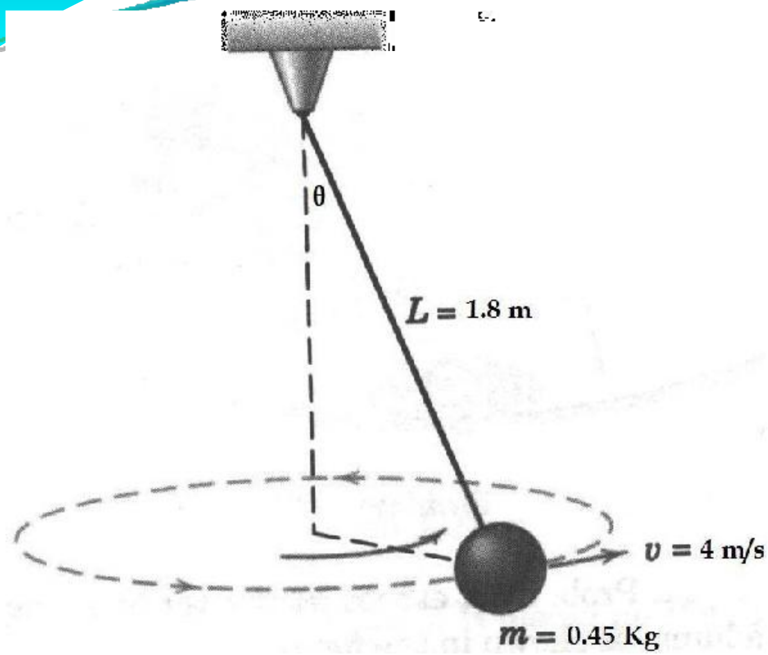
از معادل قرار دادن دیاگرام های نیروهای خارجی و موثر داریم:

$$\begin{cases} \textit{External Forces:} & \sum \vec{F} = \sum F_t \hat{e}_t + \sum F_n \hat{e}_n \\ \textit{Effective Forces:} & m\vec{a} = m a_t \hat{e}_t + m a_n \hat{e}_n = m\dfrac{dv}{dt}\hat{e}_t + m\dfrac{v^2}{\rho}\hat{e}_n \end{cases}$$

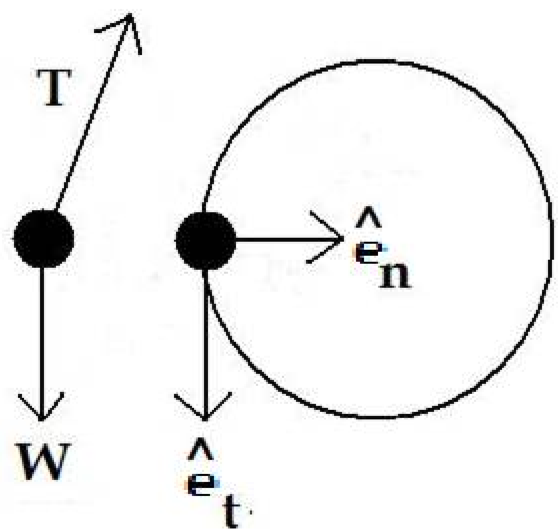
$$\Rightarrow \begin{cases} \sum F_t = m\dfrac{dv}{dt} \\ \sum F_n = m\dfrac{v^2}{\rho} \end{cases}$$

مثال

- گلوله ای به جرم ۴۵۰ گرم در صفحه ی افق با سرعت ثابت ۴ متر در ثانیه در گردش است، اگر طول نخ ۱.۸ متر باشد، زاویه ی تتا و نیروی کشش نخ را بدست آورید:



پاسخ



با توجه به اینکه در راستای قائم شتاب نداریم و با استفاده از روابط سیستم n-t داریم:

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow T\cos\theta - W = 0$$

$$\Rightarrow W = 0.450 \times 9.81 = 4.41\ N \quad (1)$$

$$\sum F_n = ma_n = m\frac{v^2}{\rho}$$

$$\Rightarrow T\sin\theta = 0.45\frac{4^2}{1.8\sin\theta} \quad (2)$$

$$(1)\ \&\ (2) \Rightarrow \begin{cases} \theta = 49.9^\circ \\ T = 6.85\ N \end{cases}$$

Equations of Motion (Polar Components)

معادلات حرکت در سیستم مختصات قطبی

- به همان روشی که در مختصات n-t نشان داده شد، از معادل قرار دادن دیاگرام های نیروهای خارجی و موثر داریم:

$$\begin{cases} \textit{External Forces:} \ \sum \vec{F} = \sum F_r \hat{e}_r + \sum F_\theta \hat{e}_\theta \\ \textit{Effective Forces:} \ m\vec{a} = m a_r \hat{e}_r + m a_\theta \hat{e}_\theta = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{e}_r + m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{e}_\theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sum F_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \\ \sum F_\theta = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \end{cases}$$

مثال

- لوله ی یک تفنگ شکاری با سرعت زاویه ای ثابت 0.5 rad/s ، درحال چرخش می باشد، که یک گلوله ی 60g از آن شلیک می شود. اگر سرعت گلوله نسبت به تفنگ در لحظه ی خروج از تفنگ 600 m/s باشد، مقدار نیروی افقی P که تفنگ زمانی که گلوله به نقطه ی A می رسد به آن وارد می کند را بدست آورید:

پاسخ

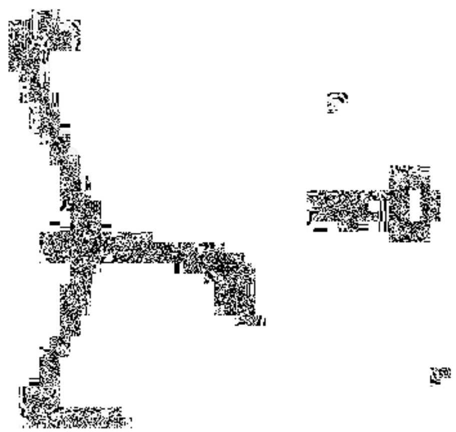
$$P = ma_\theta = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})$$

$$\dot{\theta} = Const. \Rightarrow \ddot{\theta} = 0$$

$$P = (60 \times 10^{-3})(2)(600)(0.5) = 36\ N$$

تعادل دینامیکی(اصل دآلانبر)

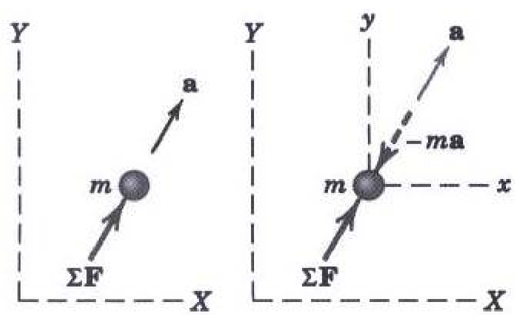
Dynamic Equilibrium (D’Alembert’s Principle)



- اگر جمله ی ma در قانون دوم نیوتن را به طرف چپ معادله منتقل کنیم، به عبارت زیر می رسیم:

$$\sum \vec{F} - m\vec{a} = 0$$

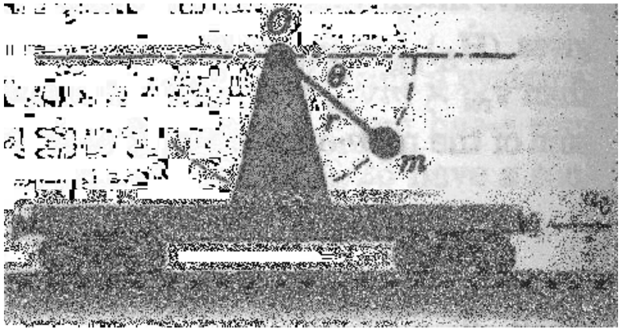
- عبارت فوق بیانگر آن است که اگر نیروی ma− را سیستم نیروهای موثر بر ذره اضافه کنیم، یک سیستم برداری معادل با صفر نتیجه می شود.
- در بیانی دیگر سیستم مختصات xyz که به ذره متصل است در نظر می گیریم، از دید ناظری که از دستگاه مختصات xyz به ذره می نگرد، ذره در تعادل دیده می شود، بنابراین باید یک نیروی ma− به آن اثر کند.



(a) (b)

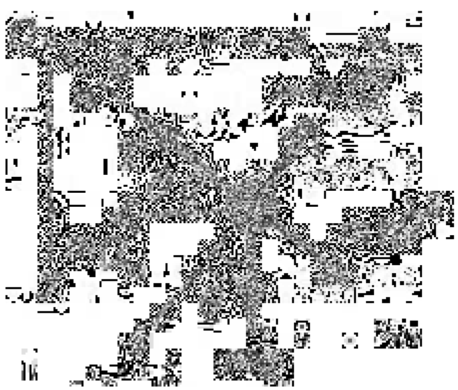
مثال

- یک پاندول ساده با جرم m توسط نخی به طول r از یک ارابه آویخته شده است، اگر گلوله از حال سکون نسبت ارابه، در $\theta=0$ رها شود، رابطه ای برای کشش نخ برای مقادیر مختلف تتا بیابید:



پاسخ

با استفاده از اصل دآلامبر، اگر ذره را در حالت تعادل دینامیکی در نظر بگیریم، با توجه به ثابت بودن طول نخ از روابط سیستم مختصات قطبی نتیجه می شود:



$$\sum F_r - m a_r = 0 \qquad r = Const. \Rightarrow \dot{r} = \ddot{r} = 0$$

$$\Rightarrow -T - m a_0 \cos\theta + m g \sin\theta - m(-r\dot{\theta}^2) = 0$$

$$\Rightarrow T = m\left[-a_0 \cos\theta + g \sin\theta + r\dot{\theta}^2\right] \quad (1)$$

$$\sum F_\theta - m a_\theta = 0$$

$$\Rightarrow m a_0 \sin\theta + m g \cos\theta - m(r\ddot{\theta}) = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{1}{r}(a_0 \sin\theta + g \cos\theta) \quad (2)$$

$$\dot{\theta}\,d\dot{\theta} \overset{(2)}{=} \ddot{\theta}\,d\theta \Rightarrow \int_0^{\dot{\theta}} \dot{\theta}\,d\dot{\theta} = \int_0^{\theta} \frac{1}{r}\left[g\cos\theta + a_0 \sin\theta\right]d\theta$$

$$\Rightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{2}{r}\left(g\sin\theta + a_0(1-\cos\theta)\right) \quad (3)$$

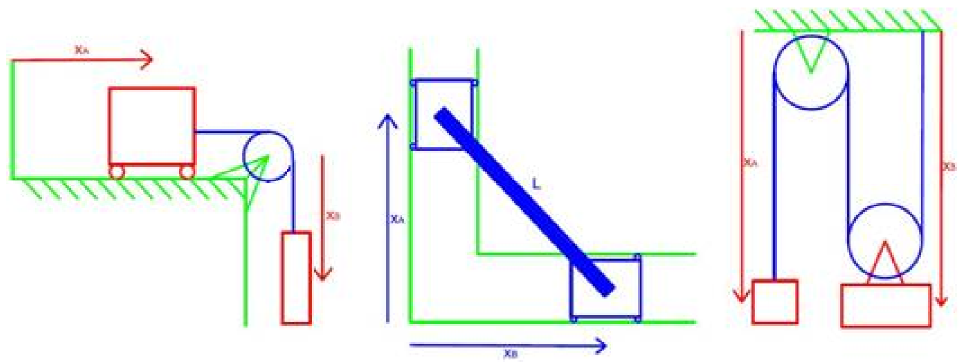
$$(1),(3) \Rightarrow T = m\left[-a_0\cos\theta + g\sin\theta + 2g\sin\theta + 2a_0(1-\cos\theta)\right]$$

$$\Rightarrow T = m\left[3g\sin\theta + a_0(2-3\cos\theta)\right]$$

Related & Constrained Motion

حرکات وابسته و مقید

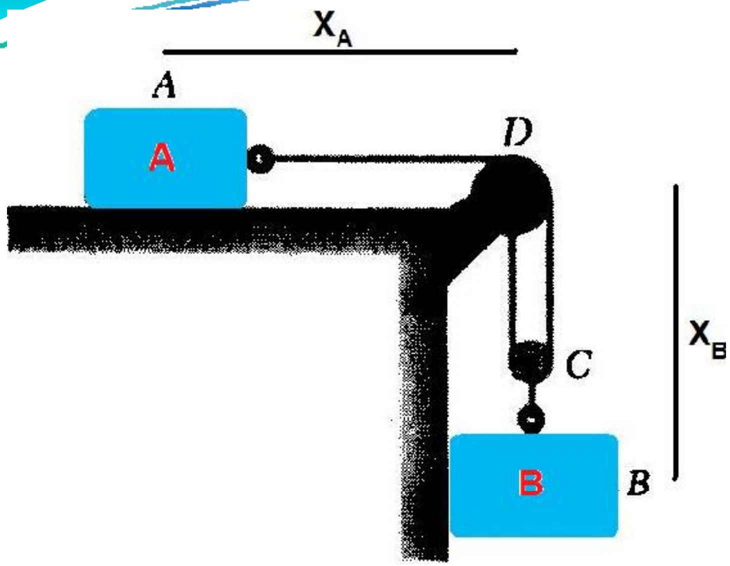
- منظور از حرکات وابسته، حالاتی می باشد که حرکت دو یا چند ذره توسط کابل یا میله ای بدون جرم به هم وابسته باشد.
- در این موارد ابتدا لازم است روابط سینماتیکی (فصل ۲) بین ذرات بدست آید سپس روابط سینتیکی برای هر ذره به طور جداگانه نوشته شود.



$\Delta x_A = \Delta x_B$ $\quad$ $\Delta x_A + 2\Delta x_B = Const.$ $\quad$ $x_A^2 + x_A^2 = L$

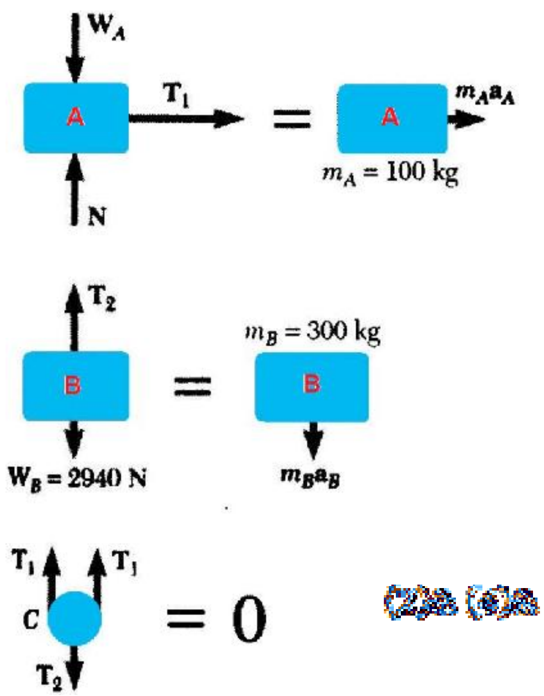
منظور از حرکات مقید، حرکاتی است که در آن ها حرکت ذره در تنها در جهات خاصی امکان پذیر است، باید توجه داشت وجود قید در یک راستا به معنی <u>امکان وارد شدن نیرو</u> به ذره در آن راستاست.

مثال حرکت وابسته



- دو بلوک نشان داده شده در شکل، از حال سکون شروع به حرکت می کنند، اگر A=100Kg و B=300Kg و قرقره ها بدون جرم و اصطکاک باشند، شتاب هر بلوک و کشش هر نخ را بدست آورید.

پاسخ



ابتدا استفاده از سینماتیک:

$$\text{Since cord length is constant} \Rightarrow x_A + 2x_B = l$$

$$\xrightarrow{\text{Twice differentiating}} a_B = -\frac{1}{2}a_A \quad (1)$$

روابط سینتیک برای به ترتیب A B C :

$$\sum F_x = m_A a_A \Rightarrow T_1 = 100a_A \; (2)$$

$$\sum F_y = m_B a_B \Rightarrow T_2 - (300)(9.81) = -300a_B \; (3)$$

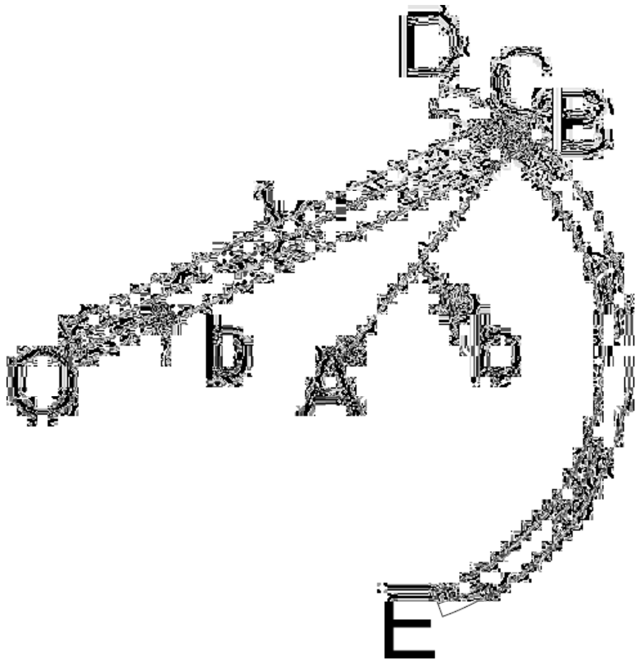
$$(1)\,\&\,(3) \Rightarrow T_2 = 2940 - 150a_A \; (4)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow T_2 - 2T_1 = 0 \; (5)$$

$$(2)\&\,(4)\&\,(5) \Rightarrow (2940 - 150a_A) - 2(100a_A) = 0 \Rightarrow a_A = 8.40\ m/s^2 \quad (6)$$

$$\Rightarrow a_B = 4.20\ m/s^2\ \&\ T_1 = 840\ N\ \&\ T_2 = 1680\ N$$

مثال حرکت مقید



- مهره ی صد گرمی B در داخل شیار افقی DE با شعاع 50cm حرکت می کند، اگر از اصطکاک چشم پوشی کنیم و در لحظه ای که θ=20°، سرعت و شتاب زاویه ای به ترتیب 15rad/s و 250rad/s2 می باشند، بدست آورید:
- الف) مولفه های شعاعی و عرضی نیرو های وارد بر مهره.
- ب) هر یک از نیروهایی که کمان DE و بازوی OB به مهره وارد می کنند.

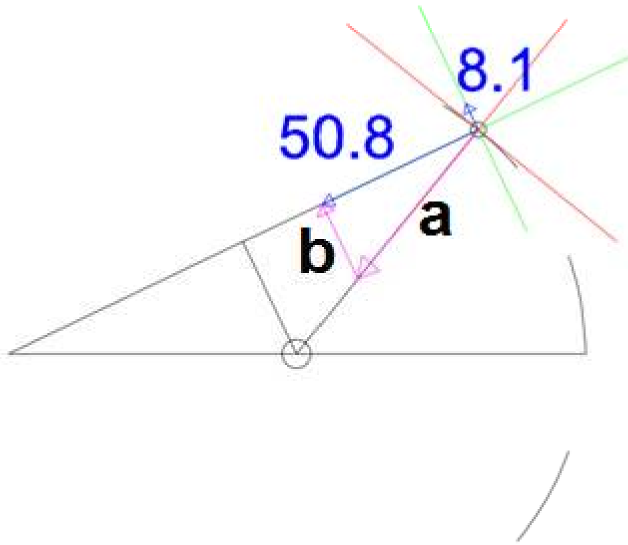
پاسخ

با انتخاب سیستم مختصات قطبی به مرکز O داریم:

$$r = 2b\cos\theta \qquad \dot{r} = -2b\dot{\theta}\sin\theta \qquad \ddot{r} = -2b\ddot{\theta}\sin\theta - 2b\dot{\theta}^2\cos\theta$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = \left(-2b\ddot{\theta}\sin\theta - 2b\dot{\theta}^2\cos\theta\right) - 2b\dot{\theta}^2\cos\theta = -2b\left(2\dot{\theta}^2\cos\theta + \ddot{\theta}\sin\theta\right)$$
$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 2b\ddot{\theta}\cos\theta - 4b\dot{\theta}^2\sin\theta = 2b\left(\ddot{\theta}\cos\theta - 2\dot{\theta}^2\sin\theta\right)$$

$$\begin{cases} F_r = ma_r = (0.1)(-2\times 0.5)(2\times 15^2\cos 20^\circ + 250\sin 20^\circ) = -50.8\ N \\ F_\theta = ma_\theta = (0.1)(2\times 0.5)(250\cos 20^\circ - 2\times 15^2\sin 20^\circ) = 8.1\ N \end{cases}$$



- برای پاسخ قسمت ب باید توجه داشت که کمان مهره را مقید به حرکت در راستای طولی خود می سازد بنابراین باید در راستای شعاعی به آن نیرو وارد کند، همچنین بازو مهره را مقید به حرکت در راستای طول خود می سازد بنابرین در راستای عمود بر بازو به مهره نیرو وارد می شود:

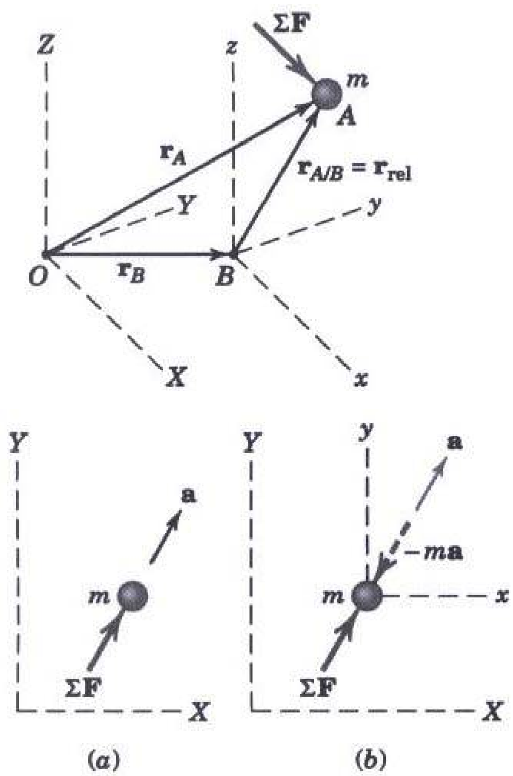
$$a \cos 20° = F_r = 50.8 \Rightarrow a = 54.1\ N$$

$$b = a \sin \theta = 54.1 \sin 20° = 18.5\ N$$

$$P_{OC} = F_\theta + b = 8.1 + 18.5 = 26.6\ N$$

$$Q_{DE} = a = 54.1\ N$$

Relative Motion حرکت نسبی

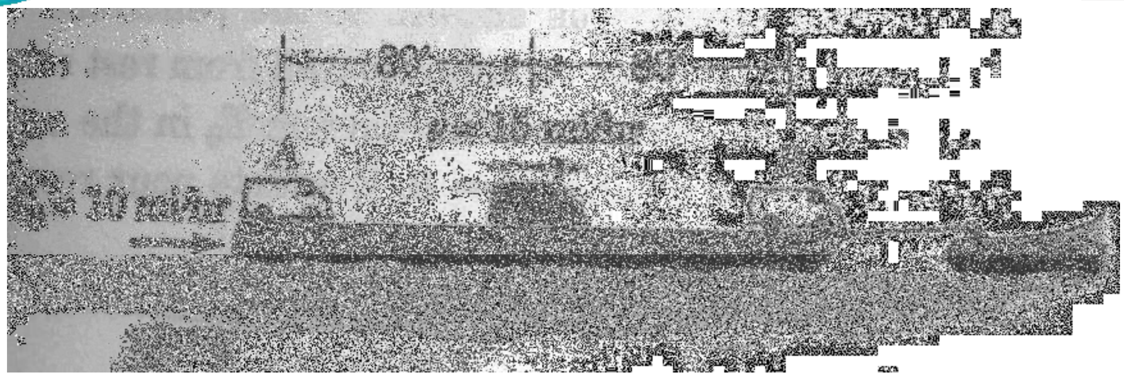


- اگر حرکت یک ذره را از دیدگاه ناظری که با سرعت ثابت حرکت انتقالی(مرجع لخت) دارد مورد بررسی قرار دهیم، قانون دوم نیوتن برقرار خواهد ماند.

- اگر حرکت ذره از دید ناظری که با شتاب ثابت حرکت انتقالی انجام می دهد، مورد بررسی قرار گیرد، بنا بر اصل دآلامبر می بایست نیرویی معادل حاصل ضرب جرم ذره در شتاب ناظر، در راستای خلاف شتاب ناظر به سیستم نیروهای موثر بر ذره اعمال کنیم تا قانون دوم نیوتن برقرار بماند.

- حرکت نسبت به مرجعی که حرکت دورانی داشته باشد در فصل ششم (در قسمت شتاب کوریلویس) بررسی می شود.

مثال



- یک ون چهارهزار پوندی از نقطه ی A بر روی کرجی به نقطه ی B می رود. اگر کرجی با سرعت ثابت 10mi/hr در حال حرکت باشد و خودروی ون از حال سکون نسبت به کرجی شروع به حرکت کند، تا سرعت 15 mi/hr شتاب بگیرد و با همان شتاب ترمز کند تا در نقطه ی B نسبت به کرجی متوقف شود، نیروی خالص بین تایر های ون و کرجی را محاسبه کنید.

پاسخ

با توجه به ثابت بودن سرعت کرجی، آن را به عنوان یک مرجع لخت در نظر می گیریم و از قانون دوم نیوتن استفاده می کنیم. ابتدا تبدیل واحدها:

$$1\,mi = 5280\,ft \quad \& \quad 1\,hr = 3600\,s \quad \& \quad g = 32.2\,ft/s^2$$

$$v_2 = 15\,mi/hr = 15 \times \frac{5280}{3600} = 22\,ft/s \qquad m = \frac{W}{g} = \frac{4000\,lb}{32.2\,ft/s^2} = 124.2\,Slug$$

با استفاده از سینماتیک:

$$v_2^2 - v_1^2 = 2a\,\Delta s \rightarrow 22^2 - 0^2 = 2a(80) \rightarrow a = 3.025\,ft/s^2$$

از قانون دوم نیوتن:

$$F = ma = (124.2\,Slug)\left(3.025\frac{ft}{s^2}\right) = 376\,lb$$

اندازه حرکت Momentum

اندازه حرکت خطی

آهنگ تغییرات اندازه حرکت خطی

بقای اندازه حرکت خطی

اندازه حرکت زاویه ای

آهنگ تغییرات اندازه حرکت زاویه ای

بقای اندازه حرکت اندازه حرکت زاویه ای

Linear Momentum of a Particle & Newton’s Second Law

اندازه حرکت خطی یک ذره و بیان دیگر قانون دوم نیوتن

- اگر در قانون دوم نیوتن به جای شتاب معادل آن یعنی آهنگ تغییرات سرعت قرار داده شود، با توجه به ثابت بودن جرم، عبارت زیر نتیجه می شود:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}$$

- بردار **mv** اندازه حرکت (مومنتوم) خطی ذره نامیده می شود، که هم جهت با بردار سرعت بوده و اندازه ی آن برابر با حاصل ضرب جرم در اندازه ی سرعت ذره است.

$$\vec{L} = m\vec{v}$$

- به بیان خود نیوتن:”برآیند نیروهای موثر بر یک ذره برابر است با آهنگ تغییر اندازه حرکت خطی آن ذره.”

$$\sum \vec{F} = \dot{\vec{L}}$$

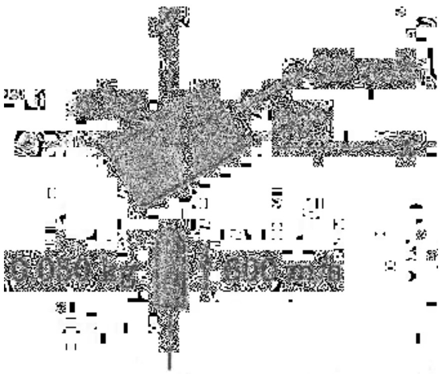
بقای اندازه حرکت خطی Conservation of Linear Momentum

- اگر در یک بازه ی زمانی نیروی خارجی به ذره وارد نشود، تغیرات اندازه حرکت آن ذره صفر خواهد بود بنابراین اندازه حرکت خطی ذره در آن بازه ثابت می ماند.

- پایسته بودن اندازه ی حرکت در یک جهت الزامی برای پایسته بودن آن در جهات دیگر نیست.

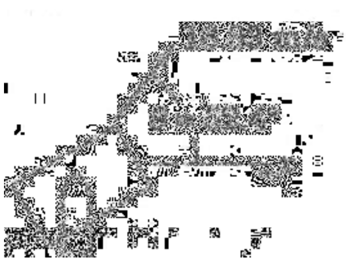
- اگر نیرویی که دو ذره به هم وارد می کنند تنها نیروی خارجی موثر بر آن ها باشد، آنگاه بنابر قانون سوم نیوتن، تغییرات اندازه حرکت هرکدام قرینه ی دیگری خواهد بود، بنابراین اندازه حرکت مجموعه ثابت باقی خواهد ماند.

مثال



- یک گلوله ی پنجاه گرمی با سرعت 600m/s به مرکز یک بلوک 4Kg برخورد کرده و به آن می چسبد. اگر قبل از برخورد بلوک در حال سرخوردن روی یک سطح افقی و بدون اصطکاک با سرعت 12m/s و در جهت نشان داده شده بوده باشد، بردار سرعت نهایی مجموعه را بیابید:

پاسخ



$$\overrightarrow{L_1} = \overrightarrow{L_2}$$

$$0.05(600j) + 4(12)(\cos 30\,i + \sin 30\,j) = (4 + 0.05)\overrightarrow{v_2}$$

$$\overrightarrow{v_2} = 10.26i + 13.33j\,\frac{m}{s}$$

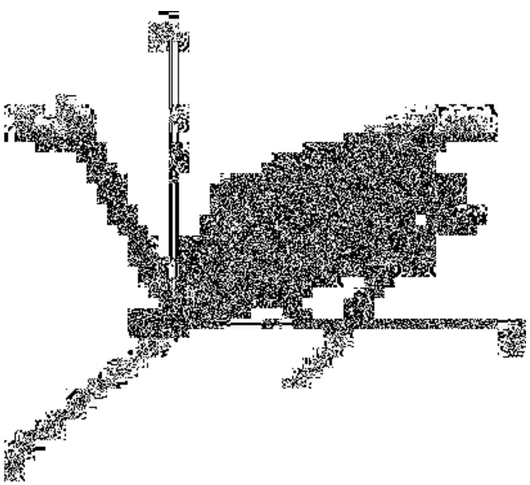
$$|\overrightarrow{v_2}| = 16.83\ m/s \qquad \angle\overrightarrow{v_2} = 52.4°$$

Angular Momentum of a Particle

اندازه حرکت زاویه ای یک ذره

- به گشتاور بردار اندازه حرکت خطی، اندازه حرکت زاویه ای گفته می شود.

$$\vec{H_O} = \vec{r} \times m\vec{v}$$



- بردار اندازه حرکت زاویه ای بر صفحه ای که با دو بردار مکان و اندازه حرکت خطی مشخص می شود، عمود است. اندازه ی این بردار می تواند از رابطه ی زیر و جهت آن از قاعده ی دست راست بدست آید.

$$H_O = rmv\sin\varphi$$

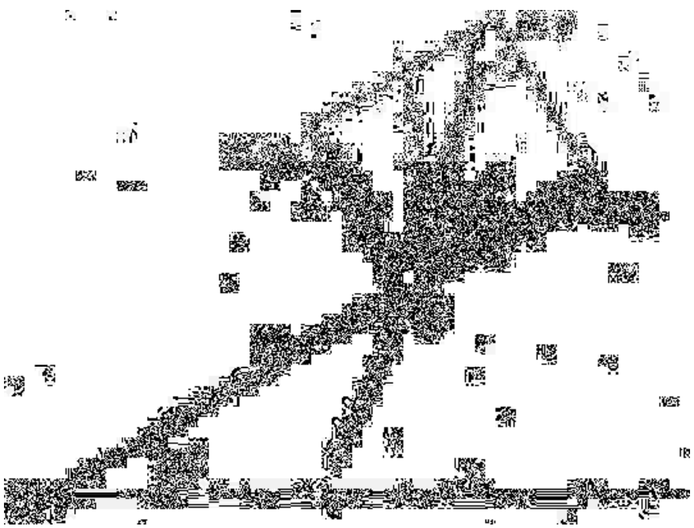
- با استفاده از قواعد بردارها داریم:

$$\vec{H_O} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ mv_x & mv_y & mv_z \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} H_x = m(yv_z - zv_y) \\ H_y = m(zv_x - xv_z) \\ H_z = m(xv_y - yv_x) \end{cases}$$

- اگر حرکت صفحه ای باشد، اندازه حرکت زاویه ای به صورت یک اسکالر در می آید. $H_O = H_z = m(xv_y - yv_x)$

اندازه حرکت زاویه ای در مختصات قطبی و آهنگ تغییر آن

& Angular Momentum in term of Radial Transverse Components & Rate of Change of Angular Momentum



- اندازه ی مومنتوم زاویه ای از رابطه ی زیر نیز بدست می آید:

$$\begin{cases} H_O = rmv\sin\varphi = rmv_\theta \\ v_\theta = r\dot{\theta} \end{cases} \Rightarrow H_O = mr^2\dot{\theta}$$

- با استفاده از قوانین مشتق برداری، آهنگ تغییرات اندازه حرکت زاویه ای به شکل زیر نتیجه می شود:

$$\dot{\vec{H}}_O = \dot{\vec{r}} \times m\vec{v} + \vec{r} \times m\dot{\vec{v}} = \vec{v} \times m\vec{v} + \vec{r} \times m\vec{a}$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{H}}_O = \vec{r} \times m\vec{a}$$

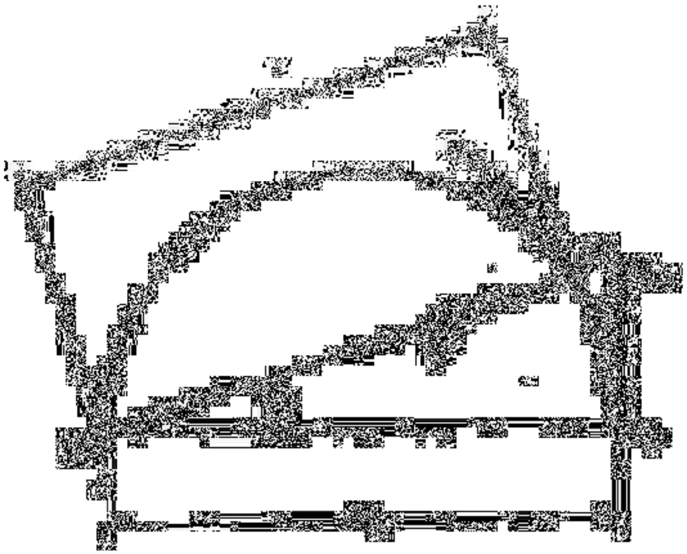
$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \dot{\vec{H}}_O = \vec{r} \times \sum \vec{F} = \sum \overrightarrow{M_O}$$

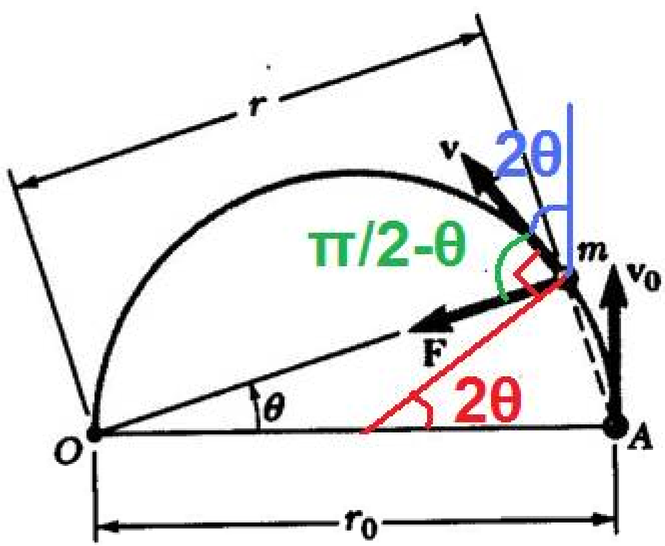
$$\sum \overrightarrow{M_O} = \dot{\vec{H}}_O$$

مثال

- ذره ای تحت تاثیر نیروی مرکزگرای F بر روی مسیر نیم دایره ای OA از نقطه ی A با سرعت اولیه ی v0 عمود بر OA حرکت می کند. سرعت ذره را در هر نقطه از مسیر بدست آورید.

پاسخ





$$\sum \overrightarrow{M_O} = 0 \Rightarrow H_O = Const.$$

@A: $H_O = |\vec{r_0} \times m\vec{v_0}| = m r_0 v_0$

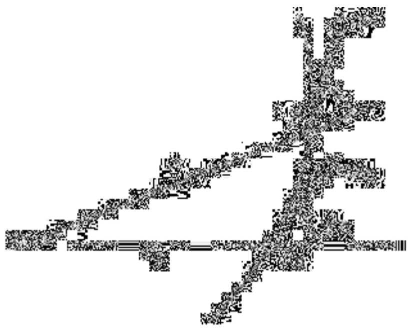
@ a point on OA:

$$H_O = m(r_0\cos\theta)(v)\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right) = m r_0 v\cos^2\theta$$

$$v = \frac{v_0}{\cos^2\theta}$$

Conservation of Angular Momentum (Motion under Central Force)

بقای اندازه حرکت زاویه ای (حرکت تحت نیروی مرکزی)



- بقای اندازه ی حرکت:

$$\sum \overrightarrow{M_O} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{H_O} = Const.$$

$$mr^2\dot{\theta} = Const.$$

- اندازه حرکت زاویه ای در واحد جرم:

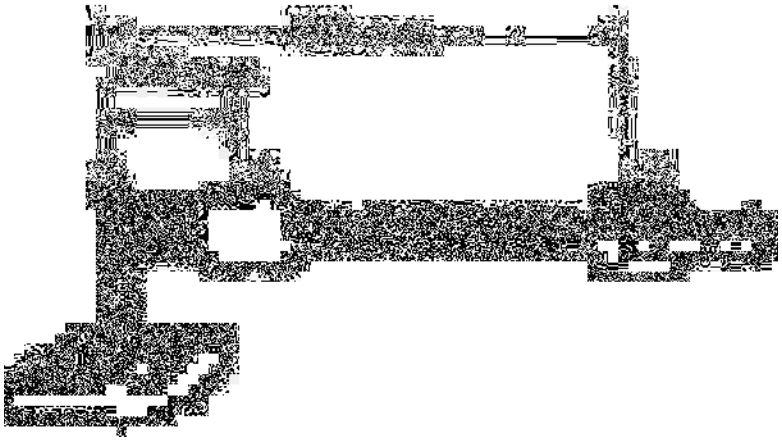
$$h = r^2\dot{\theta}$$

- سرعت سطحی (سطحی که جاروب می شود):

$$dA = \frac{1}{2}(rd\theta)r = \frac{1}{2}r^2 d\theta$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} \ (Areal \ \ Velocity)$$

مثال



- طوقه ی سیصد گرمی نشان داده شده در شکل مقابل می تواند آزادانه روی میله ی افقی حرکت کند، طوقه به وسیله ی نخی در موقعیت A بسته شده است. اگر در لحظه ای که سرعت زاویه ای میله ۱۲ رادیان بر ثانیه می باشد نخ پاره شود، موارد زیر را بیابید: (سختی فنر 5N/m طول آزاد فنر 75cmو میله بدون جرم)

$$\begin{cases} (a)\ (v_\theta)_B \\ (b)\ (a_r)_B\,,\ (a_\theta)_B \\ (c)\ \ddot{r} \end{cases}$$

پاسخ

$$\sum M_O = 0 \Rightarrow (H_O)_1 = (H_O)_2 \Rightarrow r_1 m (v_\theta)_1 = r_2 m (v_\theta)_2$$

$$\Rightarrow (v_\theta)_B = \frac{0.15}{0.6}(0.15)(12) = 0.45\ m/s$$

$$F_r = K\delta = 5(0.75 - 0.6) = 0.75\ N \qquad \Rightarrow a_r = \frac{F_r}{m} = \frac{0.75}{0.3} = 2.5\ m/s^2$$

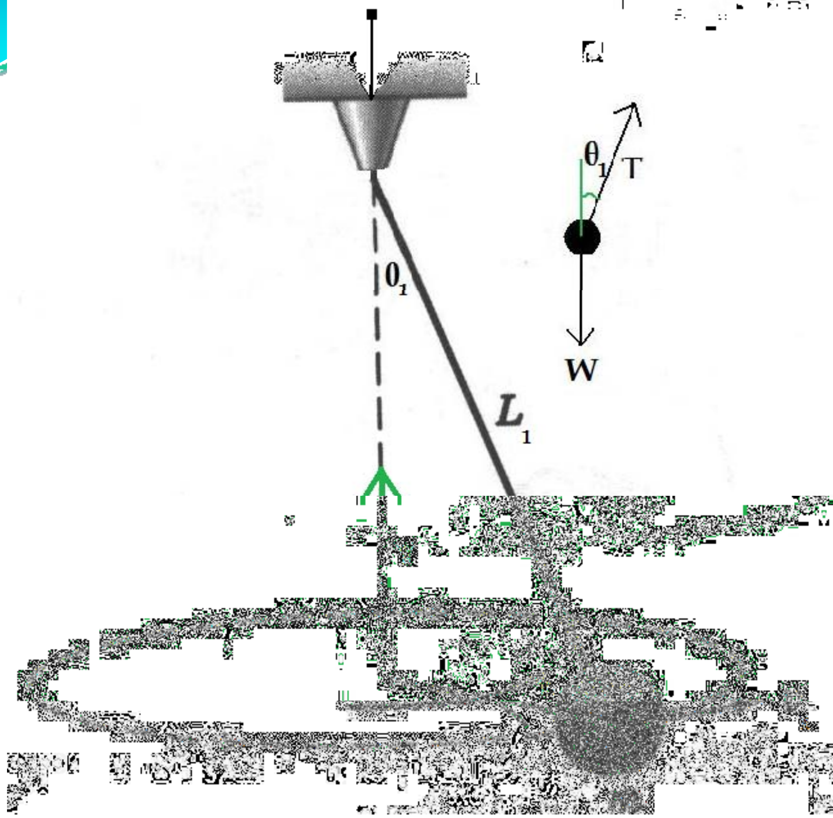
$$F_\theta = 0 \Rightarrow a_\theta = 0$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \qquad (\dot{\theta})_B = \frac{(v_\theta)_B}{r} = \frac{0.45}{0.6} = 0.75\frac{rad}{s}$$

$$\Rightarrow \ddot{r} = a_r + r\dot{\theta}^2 = 2.5 + (0.6)(0.75^2) = 2.84\ m/s^2$$

مثال

- طناب را به آهستگی بالا می کشیم تا از وضعیت ۱ به وضعیت ۲ برسیم، ارتباط بین پارامتر های L1 و L2 و θ1 و θ2 چگونه می باشد؟



پاسخ

$$\sum M_y = 0 \Rightarrow \dot{H}_y = 0 \Rightarrow H_y = Const.$$

$$R_1 m v_1 = Const. \Rightarrow L_1 \sin\theta_1 v_1 = Const. \;(1)$$

$$\sum F_n = m a_n = m\frac{v^2}{R} \Rightarrow T_1 \sin\theta_1 = m\frac{v_1^2}{L_1 \sin\theta_1} \Rightarrow v_1^2 = \frac{T_1 \sin^2\theta_1 L_1}{m} \;(2)$$

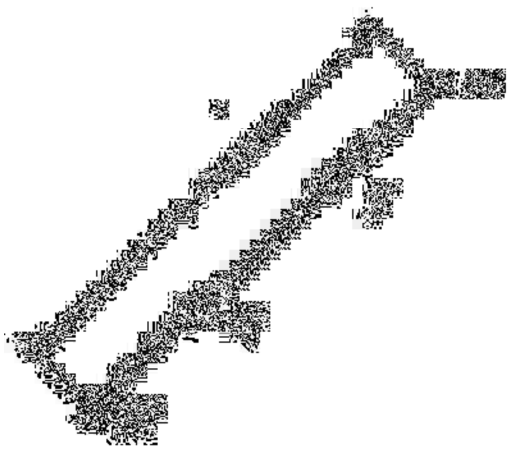
$$\sum F_z = m a_z = 0 \Rightarrow T_1 \cos\theta_1 - W = 0 \Rightarrow T_1 = \frac{mg}{\cos\theta_1} \;(3)$$

$$(2)\,\&\,(3) \Rightarrow v_1^2 = \frac{g \sin^2\theta_1 L_1}{\cos\theta_1} \;(4) \qquad (1)\,\&\,(4) \Rightarrow (L_1 \sin\theta_1)^2 \frac{g \sin^2\theta_1 L_1}{\cos\theta_1} = Const.$$

$$L_1^3 \sin^3\theta_1 \tan\theta_1 = L_2^3 \sin^3\theta_2 \tan\theta_2$$

Newton's Law of Gravitation

قانون گرانش نیوتن



- اگر دو ذره به جرم های m و M در فاصله ی r از یکدیگر قرار داشته باشند، یکدیگر را با نیروی F و F- جذب می کنند که جهت آن خط واصل بین دو ذره و اندازه ی آن از رابطه ی زیر بدست می آید:

$$F = G\frac{Mm}{r^2}$$

$$G = (66.73 \pm 0.03) \times 10^{-12}\,\frac{m^3}{kg.\,s^2}$$

$$M_e = 5.968 \times 10^{24}\ Kg$$

$$R_e = 6.37 \times 10^6\ m$$

$$g = G\frac{M_e}{R_e^2} = \begin{cases} 9.833 & Pole \\ 9.881 & Equator \\ 9.807 & avg. \end{cases}$$

Principle of Impulse

اصل تکانه

$$\vec{F} = \dot{\vec{L}} \Rightarrow \vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} \Rightarrow \vec{F}.dt = d(m\vec{v})$$

$$\Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}dt = m\overrightarrow{v_2} - m\overrightarrow{v_1}$$

- به جمله ی انتگرالی در عبارت فوق تکانه ی خطی گفته می شود که واحد آن N.s و Kg.m/s می باشد.

$$Imp_{1\to2} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}dt = \left(\int_{t_1}^{t_2} \overrightarrow{F_x}dt\right)i + \left(\int_{t_1}^{t_2} \overrightarrow{F_y}dt\right)j + \left(\int_{t_1}^{t_2} \overrightarrow{F_z}dt\right)k$$

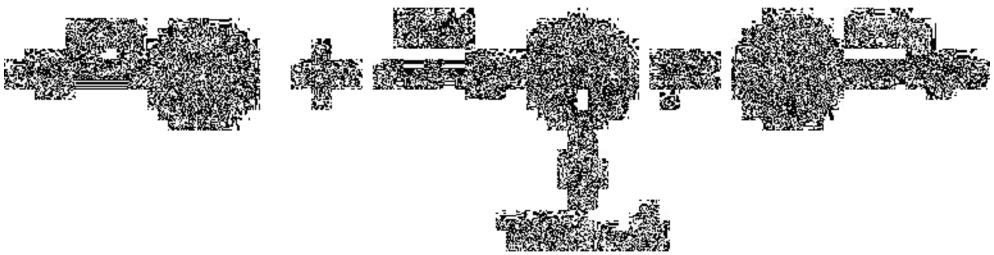
برای یک ذره:

$$mv_1 + Imp_{1\to2} = mv_2$$

برای سیستم چند ذره:

$$\sum(m_i\overrightarrow{v_i})_1 + Imp_{1\to2} = \sum(m_i\overrightarrow{v_i})_2$$

Impulsive Motion حرکت ضربه ای

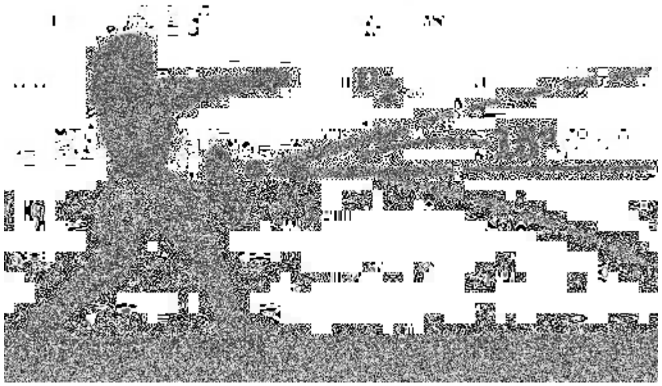


- نیرویی که در یک بازه ی زمانی کوتاه روی یک ذره اثر کند و به قدر کافی بزرگ باشد که تغییر قابل ملاحظه ای در اندازه حرکت ذره ایجاد کند، نیروی ضربه ای و به حرکت حاصل حرکت ضربه ای گفته می شود.
- در رابطه ی مقابل می توان از تمام نیرو های غیر ضربه ای مثل وزن و نیروی فنرصرف نظر کرد (به علت کوتاه بودن بازه ی زمانی، تکانه ی بسیار کوچکی وارد می کنند)
- اگر از رابطه ی فوق برای نیروهای غیر ضربه ای استفاده شود دیگر نمی توان از نیروی وزن وفنر صرف نظر کرد.

$$m\overrightarrow{v_1} + \sum \vec{F}\,\Delta t = m\overrightarrow{v_2}$$

مثال ۱

- یک تنیسور با راکت خود به توپ ۴ انسی ضربه می زند. توپ در لحظه ی قبل از برخورد با سرعت 50 ft/s در نقطه ی اوج حرکت خود بوده و پس از برخورد سرعت آن 70 ft/s می شود و با افق زاویه ی ۱۵ درجه می سازد، اگر برخورد 0.02s طول بکشد، اندازه و جهت نیرویی که راکت به توپ وارد می کند را بدست آورید. (هر ۱۶ انس یک پوند است)



پاسخ

$$m(v_x)_1 + \int_{t_1}^{t_2}\sum F_x\,dt = m(v_x)_2 \qquad -\frac{4/16}{32.2}(50) + R_x(0.02) = \frac{4/16}{32.2}(70\cos 15^\circ)$$

با در نظر گرفتن وزن:

$$m(v_y)_1 + \int_{t_1}^{t_2}\sum F_y\,dt = m(v_y)_2 \qquad \frac{4/16}{32.2}(0) + R_y(0.02) - (4/16)(0.02) = \frac{4/16}{32.2}(70\sin 15^\circ) \Rightarrow R_y = 7.28\ lb$$

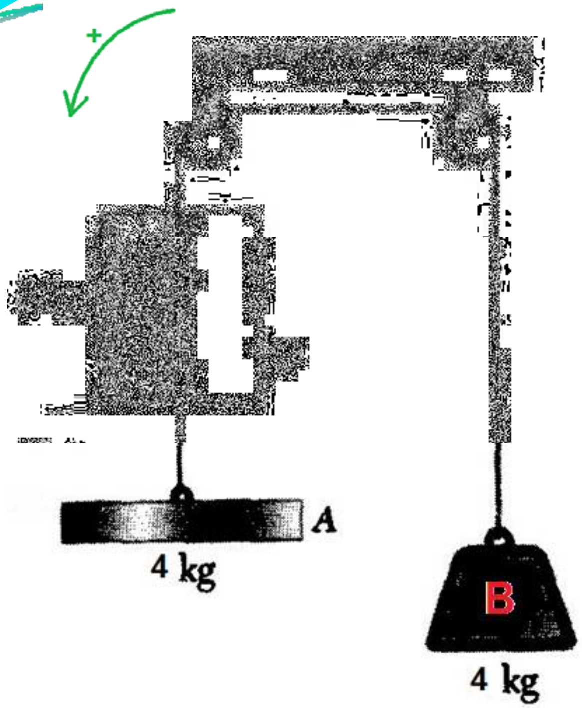
بدون در نظر گرفتن وزن:

$$\frac{4/16}{32.2}(0) + R_y(0.02) = \frac{4/16}{32.2}(70\sin 15^\circ) \Rightarrow R_y = 6.64\ lb$$

$$\begin{cases} R_x = 47.7\ lb \\ R_y = 7.28\ lb \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |\vec{R}| = 46.2\ lb \\ \angle\vec{R} = 9.06^\circ \end{cases}$$

مثال ۲

- A و B هر دو 4Kg می باشند، سیلندر هشت کیلوگرمی C، در حالی که A و B در تعادل اند به آرامی روی A قرار داده می شود.
- الف) سرعت بلوک B را پس از 0.8s بدست آورید.
- ب) نیروی اعمال شده از طرف سیلندر C به بلوک A را بدست آورید.



پاسخ

ابتدا باید توجه کرد که در این مسئله نیروی ضربه ای نداریم بنابرین نمی توان از نیروی وزن صرف نظر کرد.

$$\sum F = (4+8)(9.81) - (4)(9.81) = (8)(9.81) = 78.48\ N$$

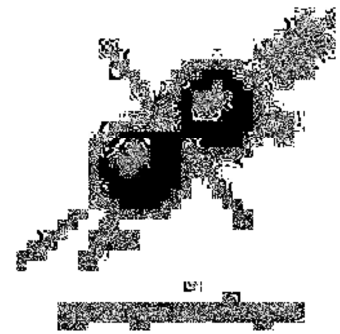
$$\sum (mv)_1 + \sum F\,\Delta t = \sum (mv)_2 \Rightarrow 0 + (78.48\ N)(0.8\ s) = (4+4+8)v_2$$

$$\Rightarrow v_2 = 3.924\ \frac{m}{s}$$

$$\sum (mv_C)_1 + \sum F_C\,\Delta t = \sum (mv_c)_2 \Rightarrow 0 + (W_C - N_{AC})(0.8) = m_c v_c$$

$$\Rightarrow [(8)(9.81) - N_{AC}](0.8) = 8v_C \Rightarrow N_{AC} = 39.24\ N$$

Impact برخورد



برخورد مرکزی مایل:
سرعت دو ذره روی خط برخورد
نباشد

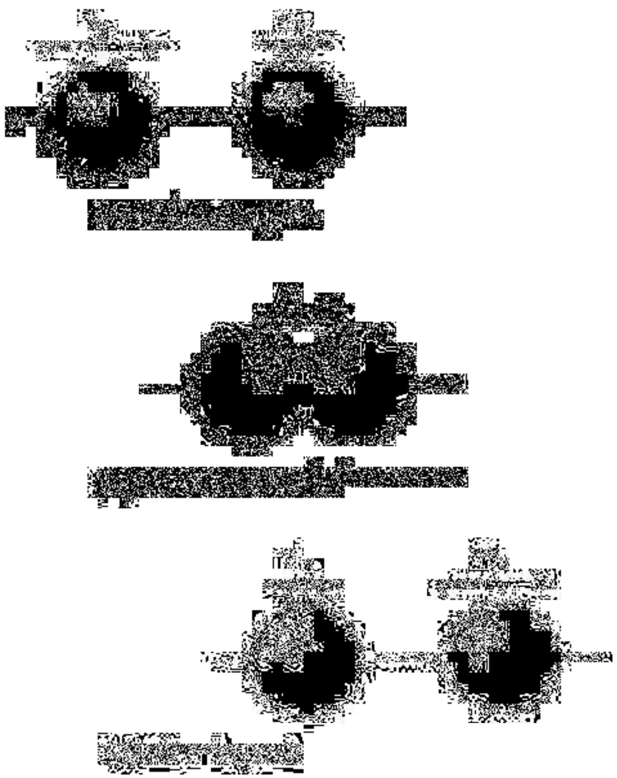
برخورد مرکزی
مستقیم: سرعت دو ذره
روی خط برخورد باشد

برخورد مرکزی:
مراکز دو ذره روی خط
برخورد

برخورد

Direct Central Impact برخورد مستقیم مرکزی

- اگر سرعت های دو ذره بر خط برخورد منطبق باشند، برخورد مستقیم خواهد بود.

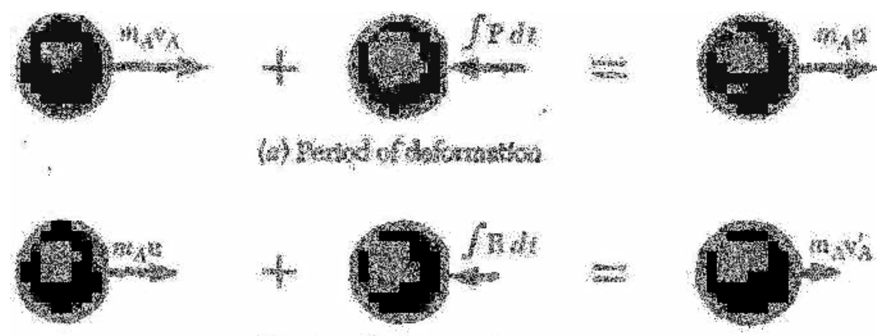


$$v_A > v_B \Rightarrow Impact$$

$$m_A\overrightarrow{v_B} + m_A\overrightarrow{v_B} = m_A\overline{v'_B} + m_A\overline{v'_B}$$

Restitution Factor ضریب استرداد

- اگر سرعت دو ذره را، زمانی بیشترین تغییر شکل را دارند و سرعت هایشان برابر شده است با u نشان دهیم، داریم:



(a) Period of deformation

(b) Period of restitution

بردارها هم راستاند و فقط اسکالری دارند

$$\begin{cases} m_A v_A - \int P\,dt = m_A u \\ m_A u - \int R\,dt = m_A v'_A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \int P\,dt = m_A v_A - m_A u \\ \int R\,dt = m_A u - m_A v'_A \end{cases}$$

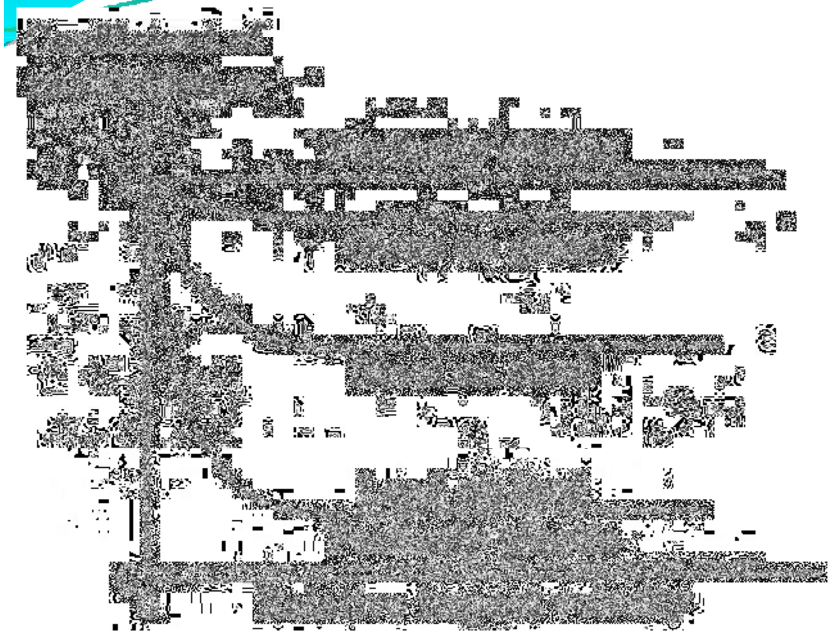
$$e = \frac{\int R\,dt}{\int P\,dt} \qquad 0 \le e \le 1$$

$$e = \frac{m_A u - m_A v'_A}{m_A v_A - m_A u} = \frac{u - v'_A}{v_A - u}$$

به همین ترتیب:

$$e = \frac{v'_B - u}{u - v_B}$$

$$e = \frac{v'_B - v'_A}{v_A - v_B} = \frac{\text{سرعت نسبی ذرات پس از برخورد}}{\text{سرعت نسبی ذرات قبل از برخورد}}$$



حالات خاص

1) پلاستیک کامل Perfectly Plastic Impact (PPI)

$$e = 0 \Rightarrow v'_A = v'_B = v'$$
$$\Rightarrow m_A v_A + m_B v_B = (m_A + m_B) v'$$

2) الاستیک کامل Perfectly Plastic Impact (PEI)

$$e = 1 \Rightarrow v'_B - v'_A = v_A - v_B \Rightarrow v'_A + v_A = v_B + v'_B$$

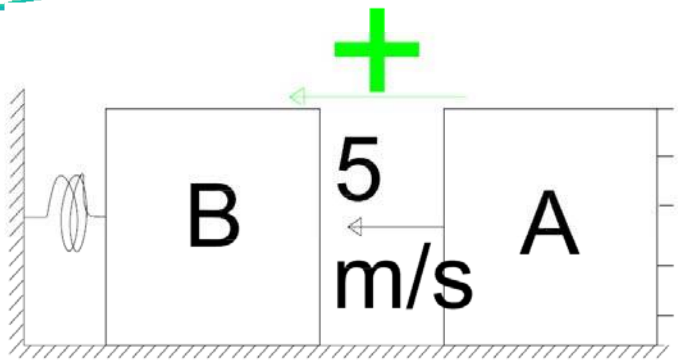
$$L = L' \Rightarrow m_A v_A + m_B v_B = m_A v'_A + m_B v'_B \Rightarrow m_A (v'_A - v_A) = m_B (v_B - v'_B)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2 = \frac{1}{2} m_A v'^2_A + \frac{1}{2} m_B v'^2_B$$

در برخورد الاستیک اتلاف انرژی نداریم ⇒ انرژی جنبشی پس از برخورد = انرژی جنبشی قبل از برخورد

مثال

- بلوک A با سرعت 5m/s به بلوک B که در حال تعادل است برخورد می کند. اگر برخورد کاملا الاستیک باشد، موقعیت نهایی دو وزنه را بیابید:
- ($K=80N/m$, $\mu_k=0.3$, $m_A = m_B = 1.5$ Kg)



پاسخ

لحظه ی برخورد اول

$$m_Av_A + m_Bv_B = m_Av'_A + m_Bv'_B$$
$$\Rightarrow (1.5)(5) + 0 = 1.5(v'_A + v'_B) \Rightarrow v'_A + v'_B = 5 \Rightarrow \begin{cases} v'_A + v'_B = 5 \\ v'_B - v'_A = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v'_A = 0 \\ v'_B = 5 \end{cases}$$
$$e = 1 \Rightarrow \frac{v'_B - v'_A}{v_A - v_B} = 1 \Rightarrow v'_B - v'_A = 5$$

از لحظه ی برخورد تا توقف B

$$\frac{1}{2}m_Bv'^2_B - F_fx = \frac{1}{2}Kx^2 \Rightarrow \frac{1}{2}(1.5)(5^2) - (1.5)(9.81)(0.3)x = \frac{1}{2}(80)x^2 \Rightarrow x = 0.632\ m$$

از حرکت مجدد B تا برخورد دوم

$$\frac{1}{2}Kx^2 - F_fx = \frac{1}{2}mv'^2_B$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2}(80)(0.0.632^2) - (1.5)(9.81)(0.3)(0.632) = \frac{1}{2}(1.5)v'^2_B \Rightarrow v'_B = 4.19\ m/s$$

لحظه ی برخورد دوم

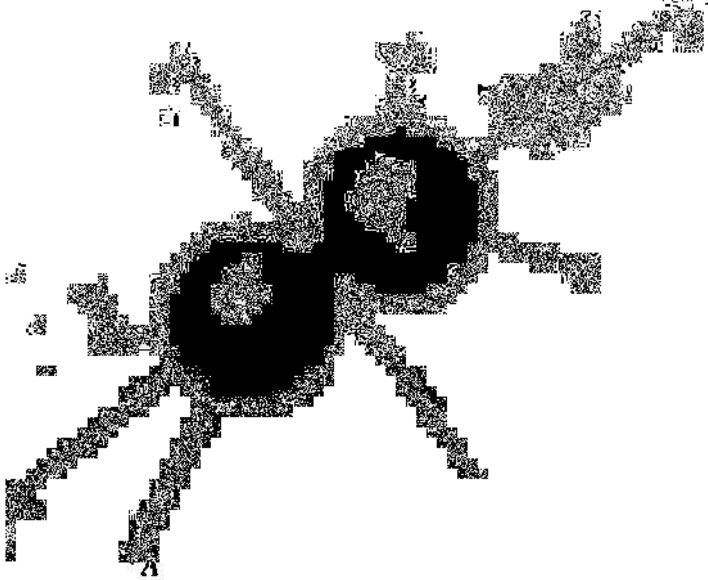
$$\begin{cases} m_Av'_A + m_Bv'_B = m_Av''_A + m_Bv''_B \\ e = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v''_A = 4.19\frac{m}{s} \\ v''_B = 0 \end{cases}$$

از برخورد دوم تا توقف A

$$\frac{1}{2}m_Av'^2_A - F_fx' = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}(1.5)(4.19^2) - (1.5)(9.81)(0.3)x' = 0 \quad \Rightarrow x'_A = 2.92\ m$$

Oblique Central Impact برخورد مرکزی مایل

- اگر سرعت دو ذره روی خط برخورد نباشد، برخورد مایل خواهد بود.



- مجهولات:

$$(v'_A)_t\,;\ (v'_A)_n\,;(v'_B)_t\,;(v'_B)_n$$

- معادلات:

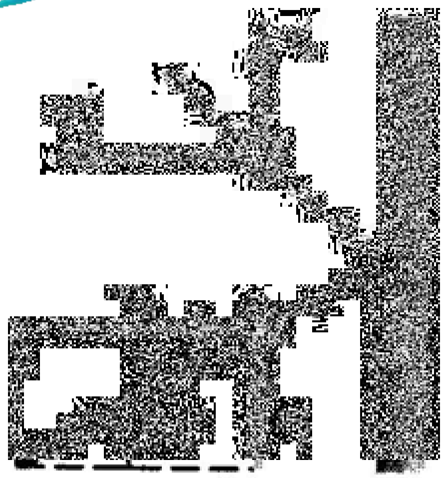
بقای اندازه حرکت در راستای خط برخورد $(n-n): m_A(v_A)_n + m_B(v_B)_n = m_A(v'_A)_n + m_B(v'_B)_n$ I

با فرض بدون اصطکاک و صیقلی بودن دو ذره : $\begin{cases} (v_A)_t = (v'_A)_t & \text{II} \\ (v_B)_t = (v'_B)_t & \text{III} \end{cases}$

ضریب استرداد : $\dfrac{(v'_B)_n - (v'_A)_n}{(v_A)_n - (v_B)_n}$ IV

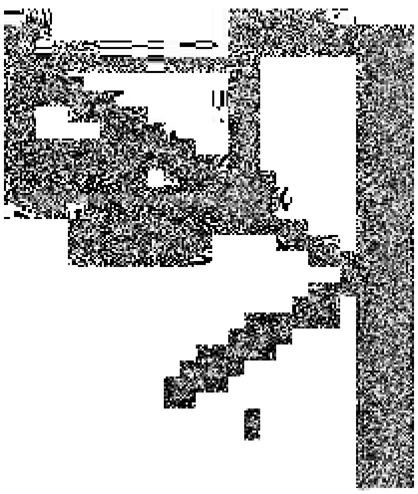
مثال

- توپی مطابق شکل، با سرعت اولیه ی 3m/s به دیوار برخورد می کند، سرعت ثانویه ی توپ را بیابید $e = 0.9$



پاسخ

$$\begin{cases} v_x = 3\cos 30 = 2.6\ m/s \\ v_y = 3\sin 30 = 1.5\ m/s \end{cases}$$



$$v'_y = v_y \Rightarrow v'_y = 1.5\ m/s$$

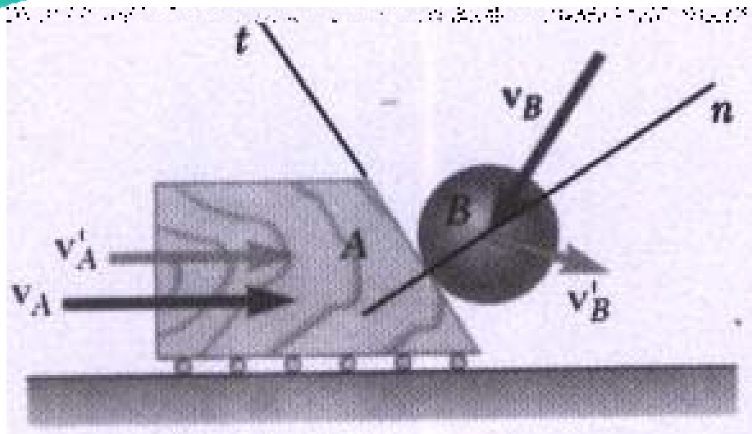
$$e = \frac{(v'_B)_n - (v'_A)_n}{(v_A)_n - (v_B)_n} = \frac{0 - v'_x}{v_x - 0} = 0.9$$

$$\Rightarrow \quad v'_x = -0.9 v_x = -0.9(2.6) = -2.34\ m/s$$

$$v' = \sqrt{v'^2_x + v'^2_y} = \sqrt{(-2.34)^2 + (1.5)^2} = 2.78\ m/s \ \nwarrow 32.7^\circ$$

$$e = 0.1 \Rightarrow v'_x = -0.26\ m/s \Rightarrow \nwarrow 0.2^\circ$$

مثال(برخورد مقید)



- بلوک A مقید به حرکت بدون اصطکاک روی سطح افقی است و گوی B می تواند آزادانه در صفحه حرکت کند، سرعت بلوک A و سرعت و جهت حرکت گوی B را پس از برخورد بیابید:

توجه: رابطه ی ضریب استرداد برقرار است

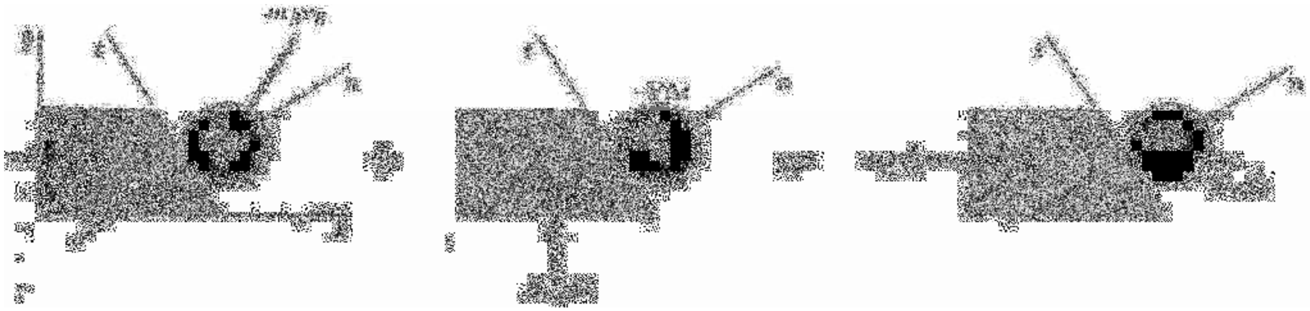
$$\begin{cases} m_A v_A - \left(\int P dt\right)\cos\theta = m_A u \\ m_A u - \left(\int R dt\right)\cos\theta = m_A v'_A \end{cases} \Rightarrow e = \frac{\int R dt}{\int P dt} = \frac{\left(\int R dt\right)\cos\theta}{\left(\int P dt\right)\cos\theta} = \frac{(u)_n - (v'_A)_n}{(v_A)_n - (u)_n}$$

$$For\ B: \quad e = \frac{(v'_B)_n - u_n}{u_n - (v_B)_n}$$

$$e = \frac{(v'_B)_n - (v'_A)_n}{(v_A)_n - (v_B)_n}$$

پاسخ

- سه مجهول داریم، بنابراین به سه معادله ی مستقل نیاز داریم:



بقای اندازه حرکت در راستای x

$$m_A(v_A)_x + m_B(v_B)_x = m_A(v'_A)_x + m_B(v'_B)_x$$

فرض بدون اصطکاک بدون سطوح تماس

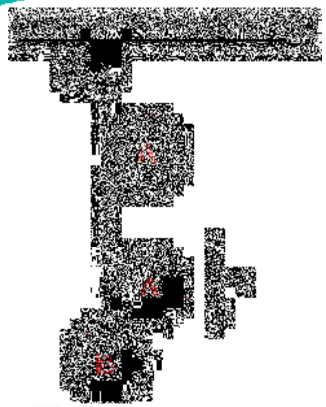
$$(v_B)_t = (v'_B)_t$$

رابطه ی ضریب استرداد

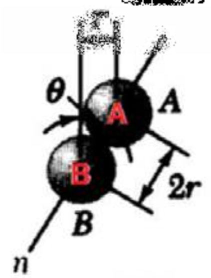
$$e = \frac{(v'_B)_n - (v'_A)_n}{(v_A)_n - (v_B)_n}$$

مثال

- گوی B توسط کابل ناکشسان BC آویخته شده است. گوی مشابه A مماس با کابل رها می شود و با سرعت v0 به گوی B برخورد می کند. با فرض ناچیز بودن اصطکاک و الاستیک بودن برخورد، سرعت های هر گوی را پس از برخورد بدست آورید.



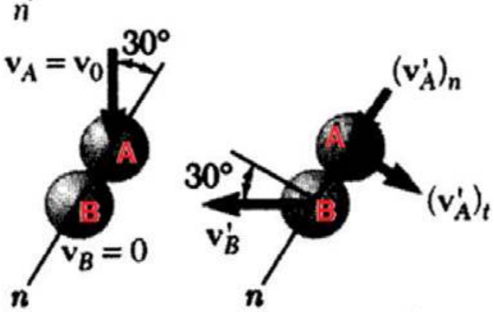
پاسخ



$$\sin\theta = \frac{r}{2r} = 0.5$$
$$\theta = 30^\circ$$

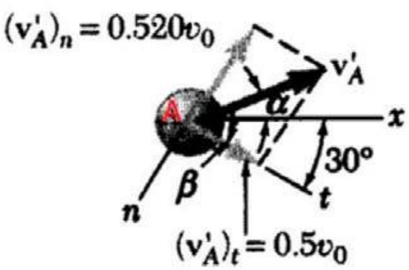
$$(v'_A)_t = (v_A)_t$$
$$\Rightarrow (v'_A)_t = v_0 \sin 30^\circ = 0.5 v_0 \quad \mathrm{I}$$

$$m_A (v_A)_x + m_B (v_B)_x = m_A (v'_A)_x + m_B (v'_B)_x$$
$$\Rightarrow 0 = (v'_A)_t \cos 30^\circ - (v'_A)_n \sin 30^\circ - v'_B \quad \mathrm{II}$$



$$\mathrm{I} \,\&\, \mathrm{II} \Rightarrow 0.5 (v'_A)_n + v'_B = 0.433 v_0 \quad \mathrm{III}$$

$$e = 1 \Rightarrow (v'_B)_n - (v'_A)_n = (v_A)_n - (v_B)_n$$
$$\Rightarrow v'_B \sin 30^\circ - (v'_A)_n = v_0 \cos 30^\circ - 0$$
$$\Rightarrow 0.5 v'_B - (v'_A)_n = 0.866 v_0 \quad \mathrm{IV}$$



$$\mathrm{III} \,\&\, \mathrm{IV} \Rightarrow \begin{cases} (v'_A)_n = -0.520 v_0 \\ v'_B = 0.693 v_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (v'_A)_n = -0.520 v_0 \\ (v'_A)_t = 0.5 v_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v'_A = 0.721 v_0 \\ \beta = 46.1^\circ \Rightarrow \alpha = 16.1^\circ \end{cases}$$

Work and Energy Methods

روش های کار و انرژی

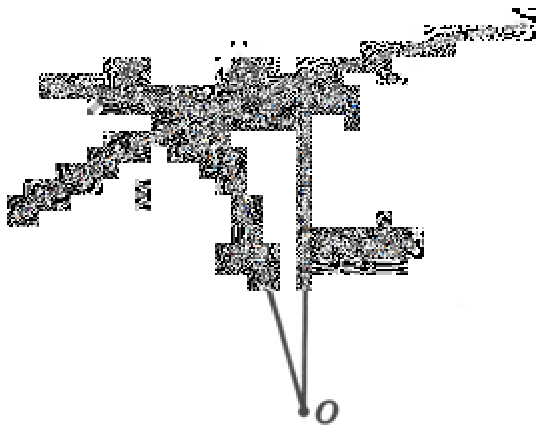
کار
- تعریف کار
- کار نیروی فنر
- کار نیروی وزن
- کار نیروی جاذبه

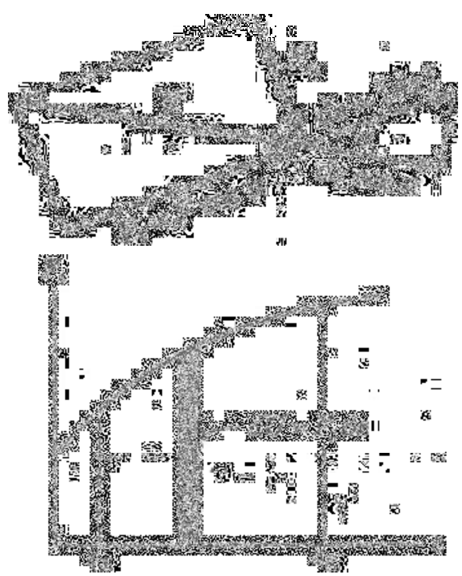
اصل کار و انرژی
- انرژی جنشی

انرژی پتانسیل
- انرزی پتانسیل گرانشی
- انرژی پتانسیل کشسانی

قانون بقای انرژی
- نیروهای پایستار

Work of a Force کار یک نیرو





- اگر برآیند نیروها را با بردار **F** نشان دهیم، به ازای جابجایی کوچک **dr** کار به صورت زیر تعریف می شود:

$$dU = \vec{F}.d\vec{r}$$

$$dU = F_t ds = F ds \cos\alpha$$

$$U_{1\to2} = \int_{A_1}^{A_2} \vec{F}.d\vec{r}$$

در مختصات n-t

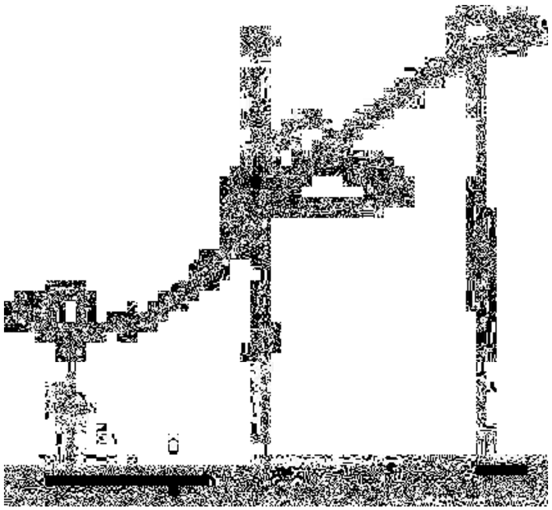
$$U_{1\to2} = \int_{s_1}^{s_2} F_t ds$$

در مختصات کارتزین

$$U_{1\to2} = \int_{A_1}^{A_2} (F_x dx + F_y dy + F_z dz)$$

Work of the Force of Gravity

کار نیروی وزن



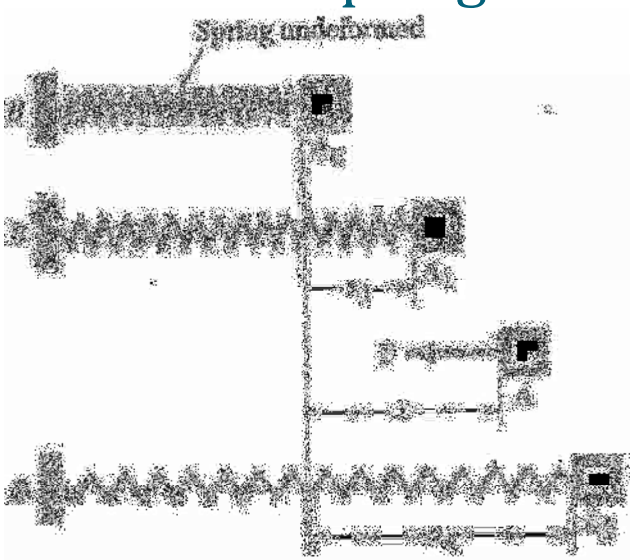
$$\begin{cases} F_x = 0 \\ F_y = -mg \Rightarrow dU = -mg\,dy \\ F_z = 0 \end{cases}$$

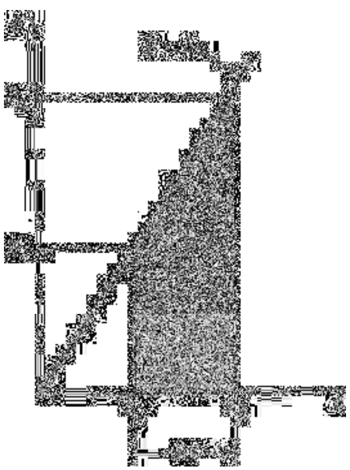
$$\Rightarrow U_{1\to 2} = \int_{y_1}^{y_2} -mg\,dy$$

$$\Rightarrow U_{1\to 2} = -mgy_2 + mgy_1 = -mg\Delta y$$

Work of the Force Exerted by a Spring

کار نیروی اعمال شده توسط فنر





$$F = Kx \Rightarrow dU = (-Kx)dx$$

$$U_{1\to 2} = \int_{x_1}^{x_2} (-Kx)dx$$

$$U_{1\to 2} = -\frac{1}{2}Kx_2^2 + \frac{1}{2}Kx_1^2$$

- اگر x2>x1 باشد، کار انجام شده منفی است و وقتی x2<x1 باشد مثبت است.

Work of a Gravitational Force

کار نیروی جاذبه

$$dU = -G\frac{Mm}{r^2}dr$$

$$U_{1\to 2} = -\int_{r_1}^{r_2} G\frac{Mm}{r^2}dr$$

$$U_{1\to 2} = GMm\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$$

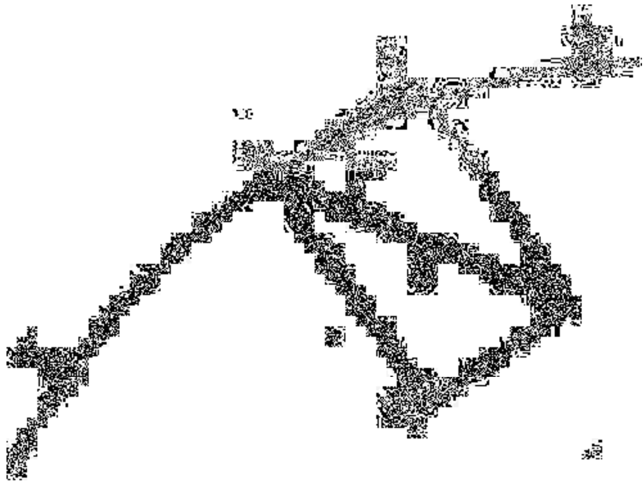
- برای سطح زمین:

$$W = mg = G\frac{Mm}{{R_e}^2} \Rightarrow GMm = W{R_e}^2$$

$$\Rightarrow U_{1\to 2} = WR_e^2\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$$

Kinetic Energy of a Particle
Principle of Work & Energy

انرژی جنبشی یک ذره
اصل کار و انرژی



$$F_t = ma_t = m\frac{dv}{dt}$$

$$F_t = m\frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = mv\frac{dv}{ds}$$

$$\Rightarrow F_t ds = mv\,dv$$

$$\Rightarrow \int_{s_1}^{s_2} F_t ds = m\int_{v_1}^{v_2} v dv = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

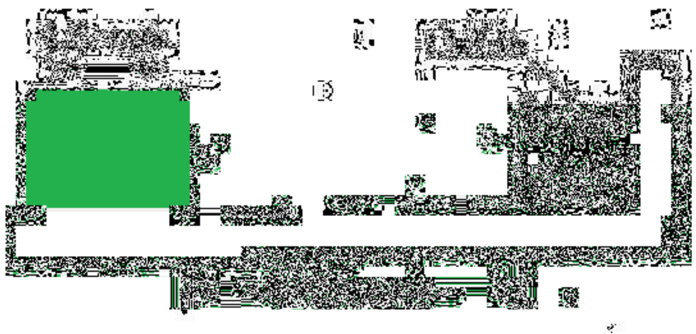
تعریف انرژی جنبشی:

$$T = \frac{1}{2}mv^2$$

اصل کار و انرژی:

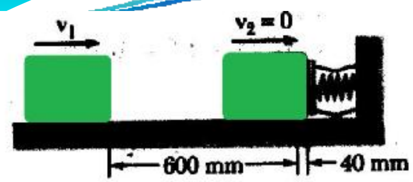
$$U_{1\to 2} = T_2 - T_1$$

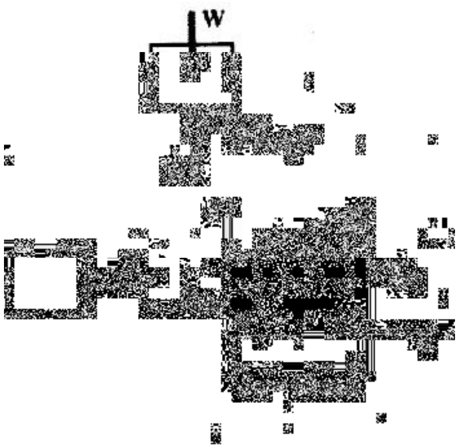
مثال



- مطابق شکل مقابل، فنر(K=20 KN/m) توسط دو کابل، 12 Cm فشرده شده است. (کابل ها، فنر و صفحه ی متصل به آن ها بدون جرم فرض می شوند) اگر پس از برخورد، بلوک فنر را 4 Cm دیگر فشرده سازد، مطلوب است:
- الف) ضریب اصطکاک دینامیکی.
- ب) سرعت بلوک وقتی در بازگشت از نقطه ی اولیه می گذرد.

پاسخ





$$T_1 = \frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{1}{2}(60)(2.5)^2 = 187.5\ j$$
$$T_2 = 0$$

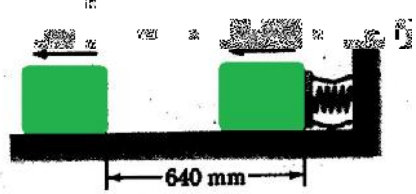
$$f_k = \mu_k N = \mu_k W = (60)(9.81)\mu_k = 588.6\mu_k$$

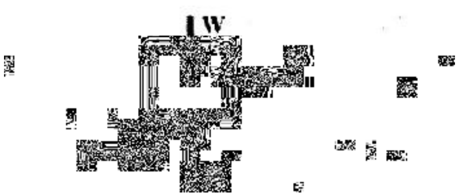
$$(U_{1\to 2})_{friction} = -F_k ds = -588.6\mu_k(0.6 + 0.04) = -396.7\mu_k$$

$$(U_{1\to 2})_{Spring} = -\left(\frac{1}{2}(F_1 + F_2)\right)\Delta x$$

$$F_1 = 20 \times 10^3 (0.12) = 2400\ N$$
$$F_2 = 20 \times 10^3 (0.16) = 3200\ N$$

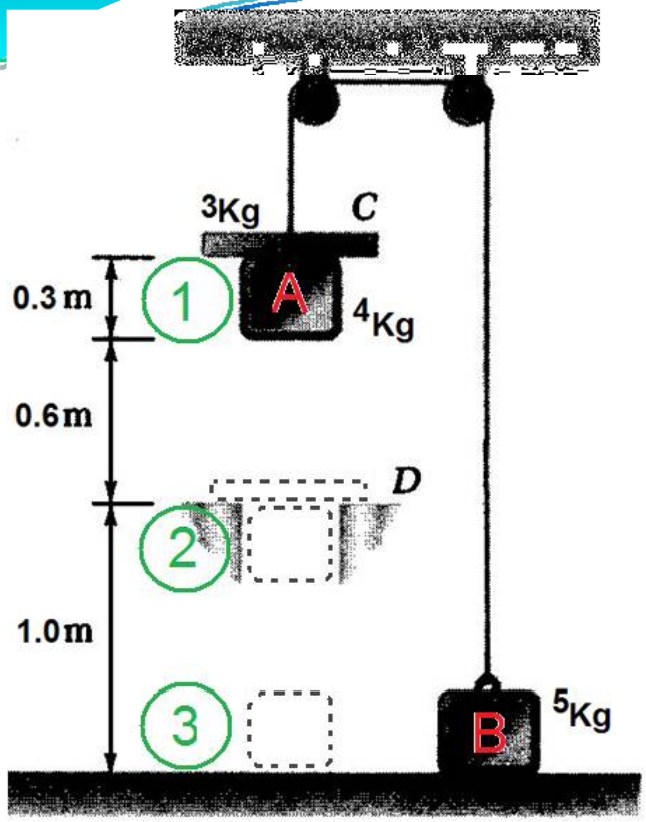
$$(U_{1\to 2})_{Spring} = -\frac{1}{2}(2400 + 3200)(0.04) = -112\ j$$
$$(U_{1\to 2})_{friction} + (U_{1\to 2})_{Spring} = T_2 - T_1$$
$$-396.7\mu_k - 112 = 0 - 187.5 \qquad \Rightarrow \ \mu_k = 0.2$$





$$(U_{2\to 3})_{friction} + (U_{2\to 3})_{Spring} = T_3 - T_2$$
$$(-396.7)(0.2) + 112 = \frac{1}{2}(60)v_3^2$$
$$v_3 = 1.105\ m/s$$

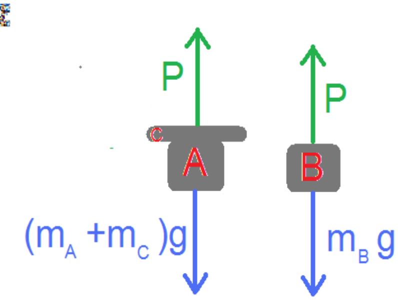
مثال



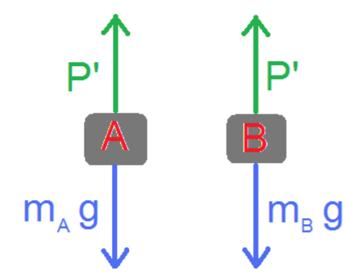
- با قراردادن C=3 Kg، مجموعه از حالت سکون به حرکت در می آید. پس از طی مسافت 90Cm، وزنه ی C از A جدا می شود. سرعت A را در لحظه ی جداشدن C و همچنین لحظه ی قبل از برخورد به زمین بدست آورید.

پاسخ

$$
\begin{aligned}
T_1 &= 0 \\
T_2 &= \frac{1}{2}\sum m_i v_i^2 = \frac{1}{2}(4+5+3)v_2^2 = 6v_2^2 \\
(U_{1-2})_A &= (7 * 9.81 - P)(0.9) \\
(U_{1-2})_B &= (P - 5 * 9.81)(0.9) \\
(U_{1-2})_{Total} &= (2 * 9.81)(0.9) = T_2 - T_1 \\
v_2 &= 1.716\, m/s
\end{aligned}
$$



$$
\begin{aligned}
T_2 &= \frac{1}{2}(m_A + m_B)v_2^2 = \frac{1}{2}(4+5)(1.716)^2 = 13.25\, j \\
T_3 &= \frac{1}{2}(9)v_3^2 = 4.5v_3^2 \\
(U_{2-3})_A &= (4 * 9.81 - P')(1 - 0.3) \\
(U_{2-3})_B &= (P' - 5 * 9.81)(1 - 0.3) \\
(U_{2-3})_{Total} &= (-1 * 9.81)(0.7) = T_3 - T_2 \\
v_3 &= 1.19\, m/s
\end{aligned}
$$



Power and Efficiency توان و بازدهی

- توان عبارت است از کار انجام شده در واحد زمان:

$$\text{توان متوسط} = \bar{P} = \frac{\Delta U}{\Delta t}$$

$$P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta U}{\Delta t} = \frac{dU}{dt}$$

$$P = \frac{dU}{dt} = \frac{\vec{F}.d\vec{r}}{dt} = \vec{F}.\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F}.\vec{v}$$

یکاهای توان:

$$1\,\frac{N.m}{s} = 1\frac{j}{s} = 1\,Watt$$

$$1\,hp = 550\,\frac{ft.lb}{s} = 0.746\frac{j}{s}$$

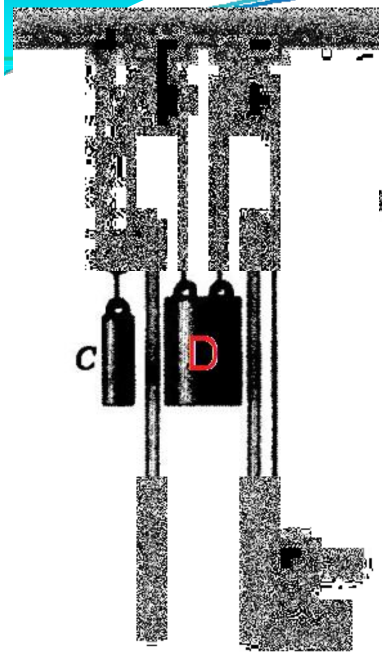
بازدهی(راندمان)

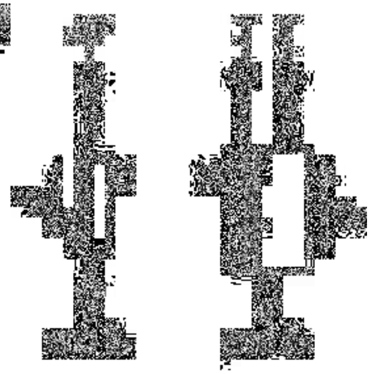
$$\eta = \frac{P_{output}}{P_{input}}$$

اگر بازدهی کلی یک سیستم متشکل از چند جز با بازدهی های جداگانه را بخواهیم:

$$\eta_{Total} = \eta_{Mechanical} \cdot \eta_{Electrical} \cdot \eta_{Thermal}$$

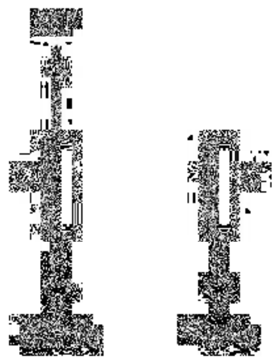
مثال





- آسانسور D، 600lb وزن داشته و وزنه تعادل آن یعنی C 800lb می باشد. مطلوب است توان موتور الکتریکی در دو حالت،
- الف) آسانسور با سرعت ثابت 8ft/s بالا برود،
- ب) آسانسور با سرعت لحظه ای 8ft/s و شتاب تند شونده ی 2.5ft/s2 بالا برود.

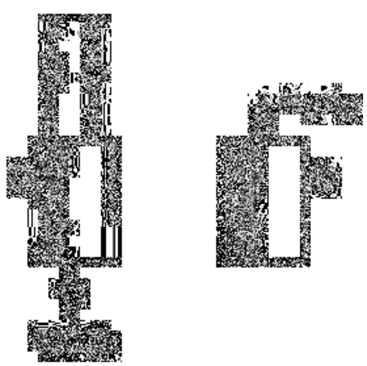
پاسخ



$$For\ C:\ \sum F_y = 0 \Rightarrow 2T - 800 = 0 \Rightarrow T = 400lb$$

$$For\ D:\ \sum F_y = 0 \Rightarrow P + T - 600 = 0 \Rightarrow P = 200lb$$

$$Power = P.v_D = (200)(8) = 1600\ ft.lb/s = 2.91\ hp$$



$$a_D = 2.5\ ft/s^2 \uparrow \xrightarrow{\text{سینماتیک}} a_C = -\frac{1}{2}a_D = 1.25\ ft/s^2 \downarrow$$

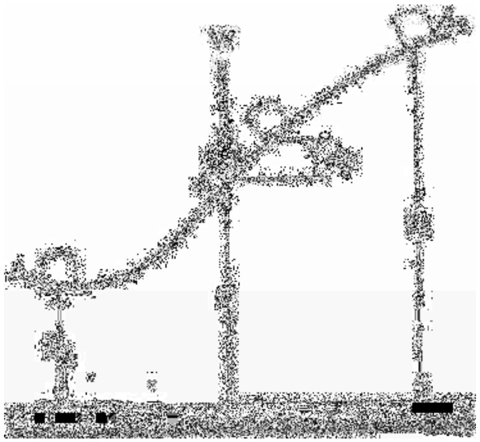
$$For\ C:\ \sum F_y = m_C a_C \Rightarrow 2T - 800 = -\frac{800}{32.2}(1.25) \Rightarrow T = 384.5lb$$

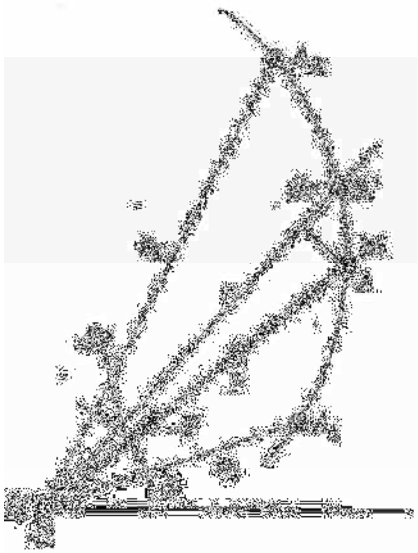
$$For\ D:\ \sum F_y = m_D a_D \Rightarrow P + T - 600 = \frac{600}{32.2}(2.5) \Rightarrow P = 262.1\ lb$$

$$Power = P.v_D = (262.1)(8) = 2097\ ft.lb/s = 3.81\ hp$$

Gravitational Potential Energy

انرژی پتانسیل گرانشی





- افزایش ارتفاع ← افزایش انرژی پتانسیل ← کار منفی

$$U_{1\to 2} = Wy_1 - Wy_2$$

تعریف می کنیم:

$$V_g = Wy$$

$$U_{1\to 2} = (V_g)_1 - (V_g)_2$$

شرط رابطه ی فوق:

$$y \ll R$$

در صورتی که فاصله ها نسبت به ابعاد زمین قابل توجه باشند:

$$F = -G\frac{Mm}{r^2}$$

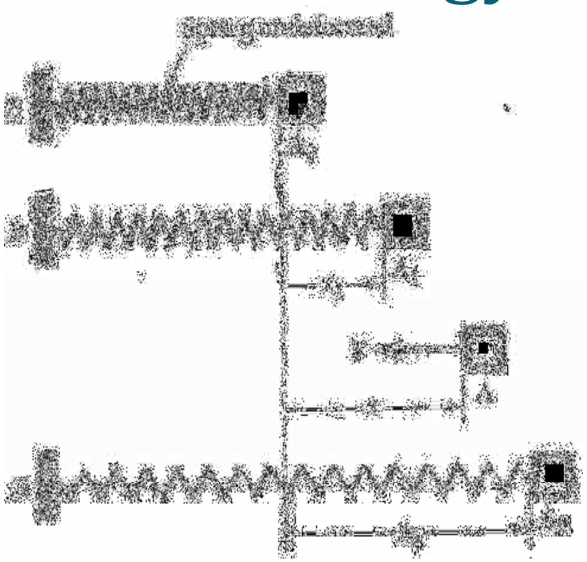
$$U_{1\to 2} = -GMm\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

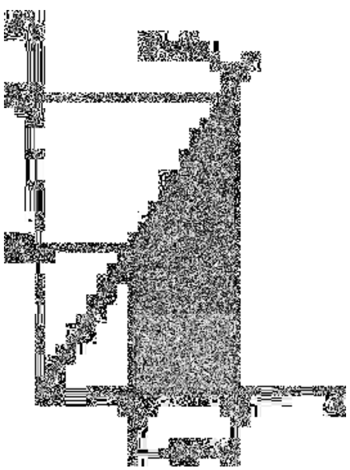
تعریف می کنیم:

$$V_g = -G\frac{Mm}{r}$$

$$U_{1\to 2} = (V_g)_1 - (V_g)_2$$

Elastic Potential Energy انرژی پتانسیل کشسانی





- افزایش طول فنر ← افزایش انرژی پتانسیل ← کار منفی نیروی فنر

$$U_{1\to 2} = \frac{1}{2}Kx_1^2 - \frac{1}{2}Kx_2^2$$

تعریف می کنیم:

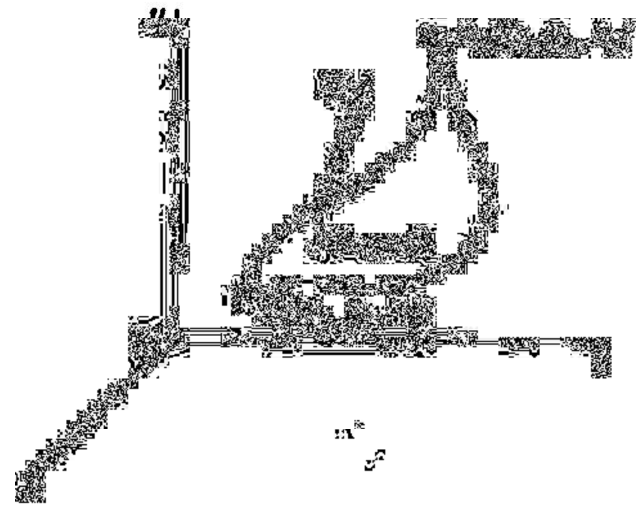
$$V_e = \frac{1}{2}Kx^2$$

$$U_{1\to 2} = (V_e)_1 - (V_e)_2$$

Conservative Forces

نیرو های پایستار

اگر F پایستار باشد $\Rightarrow \oint \vec{F}.d\vec{r}$



$$U_{1\rightarrow 2} = V_{(x_1,y_1,z_1)} - V_{(x_2,y_2,z_2)}$$

$$dU = V_{(x,y,z)} - V_{(x+dx,y+dy,z+dz)} = -dV$$

$$dU = -dV = -(\frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz)$$

$$dU = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \\ F_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \\ F_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \end{cases}$$

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} V$$

برای یک نیروی پایستار دو بعدی، باید:

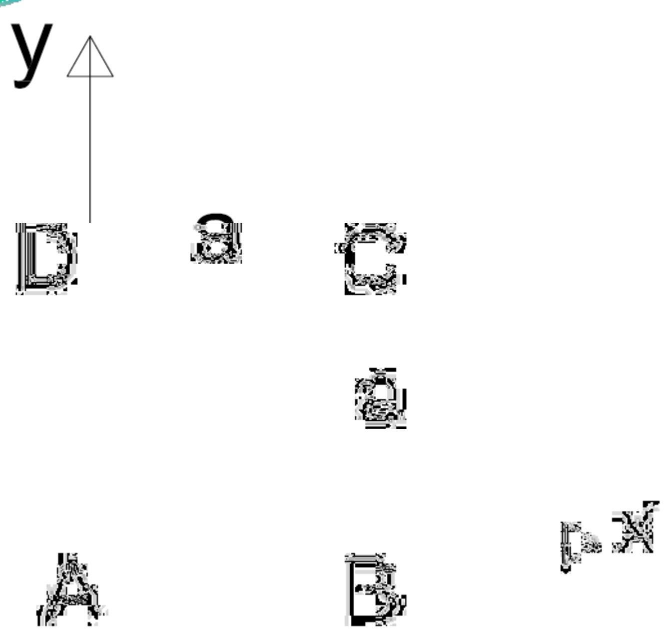
$$\begin{cases} F_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial F_x}{\partial y} = -\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial y} \\ F_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial F_y}{\partial x} = -\frac{\partial^2 y}{\partial y \partial x} \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$$

برای سه بعدی، علاوه بر رابطه ی فوق باید:

$$\frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y} , \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x}$$

مثال

- پایستاری هر یک از نیروهای زیر را بررسی کنید و کار انجام شده توسط هر یک را در مسیر بسته ی ABCDA محاسبه نمایید.



$a)\ \vec{F} = Ky\hat{i}$

$b)\ \vec{F} = Ky\hat{i} + Kx\hat{j}$

پاسخ

$a)\ \frac{\partial F_x}{\partial y} =? \frac{\partial F_y}{\partial x} \Rightarrow k \neq 0 \Rightarrow$ نیروی ناپایستار

$b)\ \frac{\partial F_x}{\partial y} =? \frac{\partial F_y}{\partial x} \Rightarrow k = k \Rightarrow$ نیروی پایستار

$$a)\ \left.\begin{array}{l} A \to B: F = 0 \ \Rightarrow U_{A\to B} = 0 \\ B \to C: \vec{F} = Ky\hat{i} \perp dy \ \Rightarrow U_{B\to C} = 0 \\ C \to D: \vec{F} = Ka\hat{i} \parallel dx \ \Rightarrow U_{C\to D} = -Ka^2 \\ D \to A: \vec{F} = Ky\hat{i} \perp dy \ \Rightarrow U_{D\to A} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow U_{A\to B\to C\to D\to A} = -Ka^2 \neq 0$$

$$b)\ \left.\begin{array}{l} A \to B: \vec{F} = Kx\hat{j} \perp dx \ \Rightarrow U_{A\to B} = 0 \\ B \to C: F_x = Ky\hat{i} \perp dy \,\&\, F_y = Ka\hat{j} \parallel dy \Rightarrow U_{B\to C} = Ka^2 \\ C \to D: F_x = Ka\hat{i} \parallel dx \,\&\, F_y = Kx\hat{j} \perp dx \Rightarrow U_{C\to D} = -Ka^2 \\ D \to A: \vec{F} = Ky\hat{i} \perp dy \ \Rightarrow U_{D\to A} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow U_{A\to B\to C\to D\to A} = 0$$

Law of Conservation of Energy

قانون بقای انرژی

اگر نیروها پایستار باشند $T_1 + V_1 = T_2 + V_2$

اصل کار و انرژی
نیرو های پایستار

$$\begin{cases} U_{1\to 2} = T_2 - T_1 \\ U_{1\to 2} = V_1 - V_2 \end{cases}$$

اگر نیروها پایستار نباشند

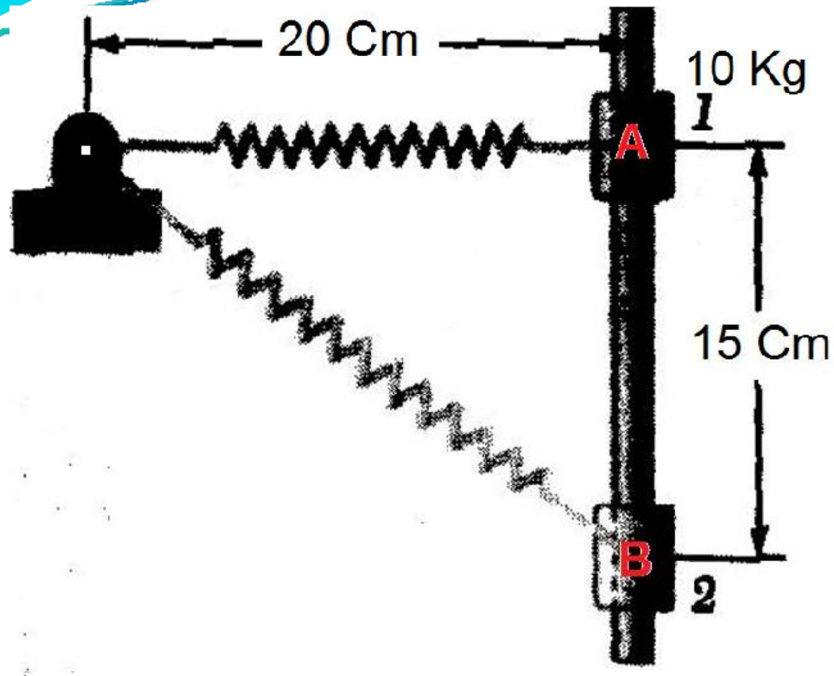
$$U_{1\to 2} = (U_{1\to 2})_{Cons.} + (U_{1\to 2})_{nonCons.}$$

$$(U_{1\to 2})_{Cons.} + (U_{1\to 2})_{nonCons.} = T_2 - T_1$$

$$V_1 - V_2 + (U_{1\to 2})_{nonCons.} = T_2 - T_1$$

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2 + (U_{1\to 2})_{nonCons.}$$

مثال ۱



- طوقه ی A به جرم 10Kg مطابق شکل به فنری با سختی 500N/m متصل شده است، طول آزاد فنر 10Cm می باشد. اگر طوقه از حال سکون رها شود، سرعت آن در موقعیت B چقدر خواهد بود؟ (از اصطکاک صرف نظر می شود.)

پاسخ

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$

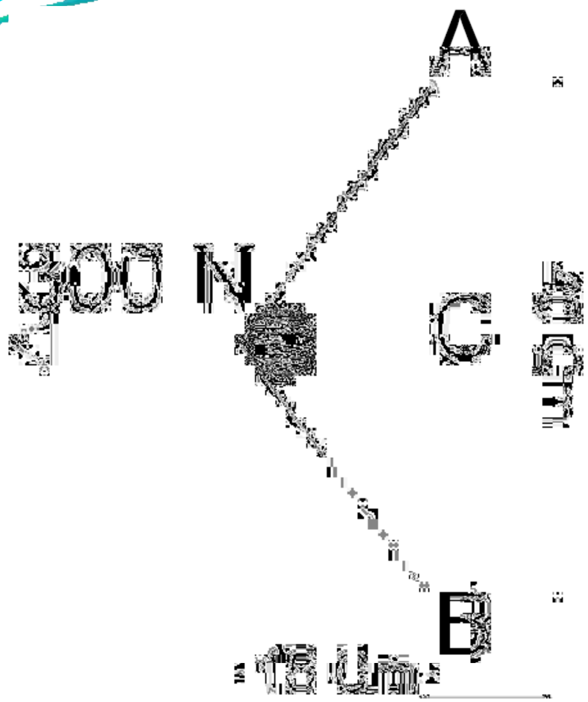
$$(V_1)_e + (V_1)_g = T_2 + (V_2)_e$$

$$\frac{1}{2}(500)(0.1)^2 + (10)(9.81)(0.15) = \frac{1}{2}(10)v_B^2 + \frac{1}{2}(500)(0.25 - 0.1)^2$$

$$v_2 = 2.15\, m/s \downarrow$$

مثال ۲

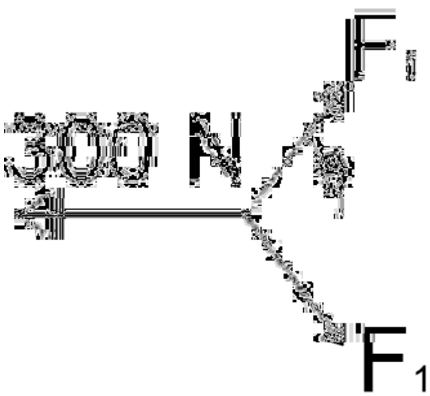
- بین دو نقطه ی A و B یک کشش با کشش اولیه ی 50 N بسته شده است، با اعمال یک نیروی 300N یک قطعه سنگ 100gr را در موقعیت نشان داده شده در شکل نگه می داریم و سپس رها می کنیم، وقتی سنگ از نقطه ی C می گذرد سرعتش چقدر است؟



پاسخ

$$2F_1\cos\theta = 300 \Rightarrow F_1(2)\left(\frac{1.5}{2.5}\right) = 300 \Rightarrow F_1 = 250\ N$$

$$\begin{cases} F_0 = K(40 - l_0) \\ F_1 = K(50 - l_1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K = 20\dfrac{N}{Cm} = 2000\dfrac{N}{m} \\ l_0 = 2.5\ Cm \end{cases}$$



$$T_1 + (V_1)_s = T_2 + (V_2)_s$$

$$\frac{1}{2}(2000)\left(\frac{12.5}{100}\right)^2 = \frac{1}{2}(0.1)v_2^2 + \frac{1}{2}(2000)\left(\frac{2.5}{100}\right)^2$$

$$\Rightarrow v_2 = \sqrt{300} = 17.32\ m/s$$

Chapter Review مرور فصل

اندازه حرکت و تکانه

- اندازه حرکت خطی و بیان دیگر قانون دوم نیوتن
- اندازه حکت زاویه ای
- تکانه و نیروهای ضربه ای

نیرو، جرم و شتاب

- بیان نیرویی قانون دوم نیوتن
- تعادل دینامیکی یا اصل دآلانبر
- کاربرد قانون دوم نیوتن در سیستم های مختصات
- حرکت وابسته و مقید
- حرکت نسبی

برخورد

- برخورد مرکزی مستقیم
- برخورد مرکزی مایل

روش های کار و انرژی

- اصل کار و انرژی
- انرژی های پتانسیل
- قانون بقای انرژی

System of Particles سیستم ذرات

فصل ۴

تعمیم یافته ی قانون دوم نیوتن

مومنتم (اندازه حرکت) وتکانه

مرکز جرم

کار و انرژی

بقای اندازه حرکت

اصل تکانه و اندازه ی حرکت برای سیستم ذرات

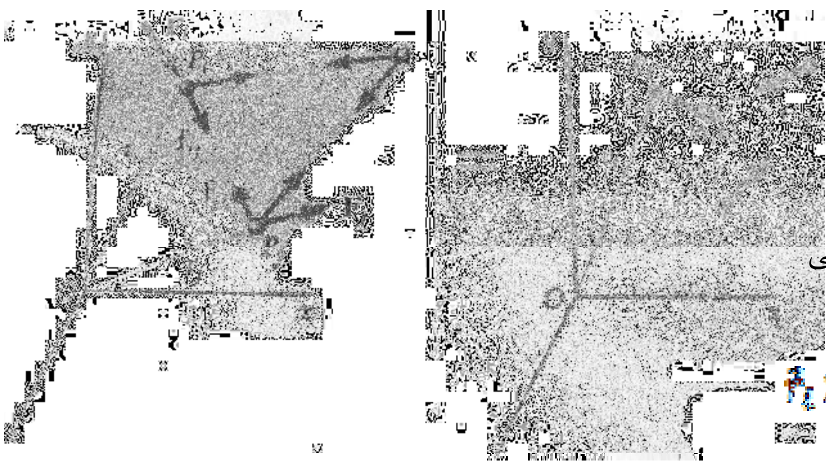
اندازه حرکت زاویه ای حول مرکز جرم

انرژی جنبشی سیستم ذرات

اصل کار و انرژی

Generalized Newton's Second Law تعمیم یافته ی قانون دوم نیوتن

- اگر نیرویی که از طرف ذره ی j به ذره ی i وارد می شود را با f_{ij} ونیروی خارجی که به ذره ی i وارد می شود را با F_i نشان دهیم، با استفاده از قانون دوم نیوتن داریم:



$$\vec{F}_i + \sum_{j=1}^{n} \vec{f}_{ij} = m_i \vec{a}_i \qquad \text{I}$$

برآیند نیروهای خارجی

برآیند نیروهای داخلی

نیروهای موثر

$$\vec{r}_i \times \vec{F}_i + \sum (\vec{r}_i \times \vec{f}_{ij}) = \vec{r}_i \times m_i \vec{a}_i \qquad \text{II}$$

- بنابر قانون سوم نیوتن:

$$\vec{f}_{ij} = -\vec{f}_{ji} \Rightarrow \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} f_{ij} = 0 \Rightarrow \vec{f}_{ij} + \vec{f}_{ji} = 0$$

$$\vec{r}_i \times \vec{f}_{ij} + \vec{r}_j \times \vec{f}_{ji} + \vec{r}_i \times \vec{f}_{ji} - \vec{r}_i \times \vec{f}_{ji} = \vec{r}_i(\underbrace{\vec{f}_{ij} + \vec{f}_{ji}}_{0}) + \underbrace{(\vec{r}_j - \vec{r}_i) \times \vec{f}_{ji}}_{0} = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} (\vec{r}_i \times \vec{f}_{ij}) = 0 \qquad \text{III}$$

$$(\vec{r}_j - \vec{r}_i) \parallel \vec{f}_{ji}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{\text{I, III}} \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{a}_i \\ \xrightarrow{\text{II, III}} \sum_{i=1}^{n} (\vec{r}_i \times \vec{F}_i) = \sum_{i=1}^{n} (\vec{r}_i \times m_i \vec{a}_i) \end{cases}$$

Linear and Angular Momentum of a System of Particles

اندازه حرکت خطی و زاویه ای در سیستم ذرات

- اندازه حرکت خطی و زاویه ای در سیستم ذرات :

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i \Rightarrow \dot{\vec{L}} = \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\vec{v}}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{a}_i \Rightarrow \dot{\vec{L}} = \sum \vec{F}_i$$

برآیند نیروهای خارجی

$$\dot{\vec{H}}_O = \underbrace{\cancelto{0}{\sum_{i=1}^{n} \left(\vec{v}_i \times m_i \vec{v}_i\right)}}_{} + \sum_{i=1}^{n} \left(\vec{r}_i \times m_i \dot{\vec{v}}_i\right) \quad \Longrightarrow \quad \dot{\vec{H}}_O = \sum \vec{M}_O$$

برآیند لنگر خارجی روی کل سیستم

$$\vec{v}_i \parallel \vec{v}_i \Rightarrow \sum \left(\vec{v}_i \times m_i \vec{v}_i\right) = 0$$

Conservation of Momentum for a System of Particles بقای اندازه حرکت برای سیستم ذرات

- بقای اندازه حرکت برای سیستم ذرات :

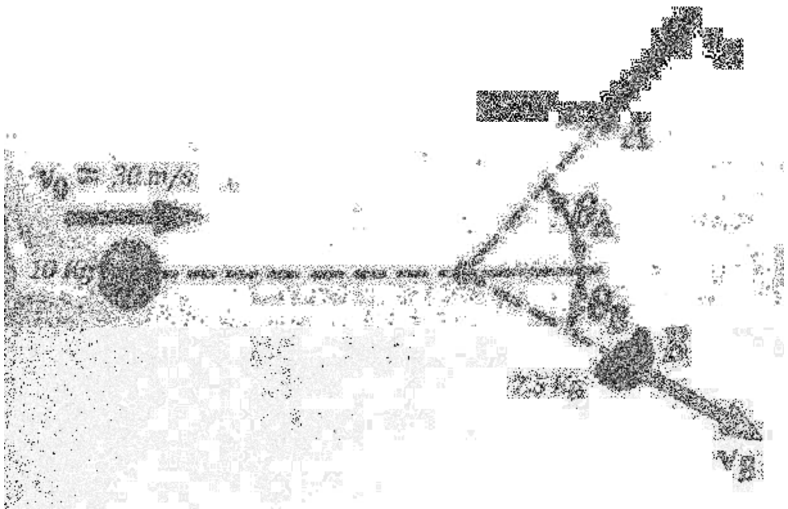
- اگر برآیند نیروها و لنگرهای خارجی برابر صفر باشد :

$$\begin{cases} \text{کل سیستم} \quad \dot{\vec{L}} = 0 \Rightarrow \vec{L} = const. \\ \text{کل سیستم} \quad \dot{\vec{H}}_G = \dot{\vec{H}}'_G = 0 \Rightarrow \vec{H}_G = \vec{H}'_G = const. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{L} = m\vec{\bar{v}} = \text{ثابت} \Rightarrow \vec{\bar{v}} \quad \text{مقدار و جهتش ثابت می ماند} \\ \vec{H}_G \quad \text{ثابت} \end{cases}$$

مثال

- جسم ۱۰کیلوگرمی که با سرعت ۳۰ به طور افقی در حل حرکت بوده، ناگهان منفجر شده و به دو جسم B و A تقسیم می شود. اگر $\theta_A = 45^\circ$, $\theta_B = 30^\circ$ سرعت هر تکه را تعیین کنید .



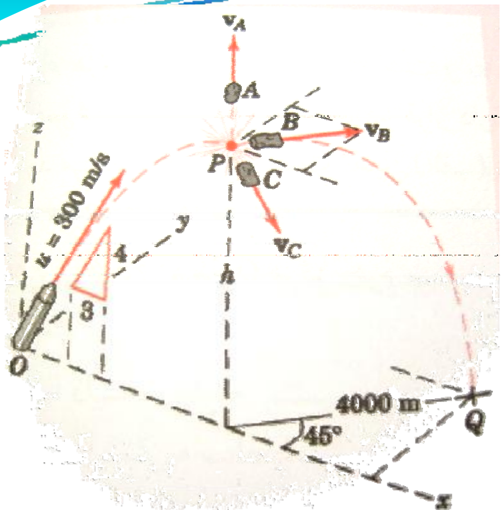
پاسخ

$$m\vec{V}_0 = m\vec{V}_A + m\vec{V}_B$$

$$\Rightarrow 10(30\hat{i}) = 2.5\left(V_A \times \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{i} + V_A \times \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{j}\right) + 7.5\left(V_B \times \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{i} - V_B \times \frac{1}{2}\hat{j}\right)$$

$$\begin{cases} 300 = 2.5V_A \times \frac{\sqrt{2}}{2} + 7.5V_B \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 = 2.5V_A \times \frac{\sqrt{2}}{2} - 7.5V_B \times \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} v_A &= 62.1 \text{ m/s} \\ v_B &= 29.3 \text{ m/s} \end{aligned}$$

مثال



- خمپاره ای به جرم 20Kg از نقطه ی O با سرعت اولیه u=300 m/s در صفحه عمودی x-z و در امتداد شیبی مطابق شکل شلیک می شود . وقتی خمپاره به اوج مسیر خود در نقطه ی P می رسد منفجر می شود و به سه ترکش A , B , C تقسیم می شود . بلافاصله پس از انفجار مشاهده می شود که ترکش A در امتداد عمودی 500m نسبت به نقطه ی P بالا می رود و ترکش B سرعت افقی v_B را دارد و سرانجام در نقطه Q فرود می آید. وقتی ترکش های A , B , C را پیدا می کنند جرم آن ها به ترتیب 5 , 9 , 6 Kg است . مطلوب است محاسبه ی سرعت ترکش C بلافاصله پس از انفجار. (از مقاومت جو چشم پوشی کنید.)

پاسخ

زمان لازم برای رسیدن خمپاره به نقطه ی P:

$$t = \frac{u_z}{g} = \frac{300\,\frac{4}{5}}{9.81} = 24.5\ s$$

ارتفاع اوج خمپاره:

$$h = \frac{{u_z}^2}{2g} = \frac{(300\,\frac{4}{5})^2}{2 \times 9.81} = 2940\ m$$

اندازه ی سرعت ترکش A برابر است با :

$$v_A = \sqrt{2gh_A} = \sqrt{2(9.81)(500)} = 99.0\,\frac{m}{s}$$

ترکش B 24.5s فرصت می خواهد تا به زمین باز گردد. بنابراین سرعت افقی آن که ثابت می ماند برابر است با :

$$v_B = \frac{s}{t} = \frac{4000}{24.5} = 163.5\,\frac{m}{s}$$

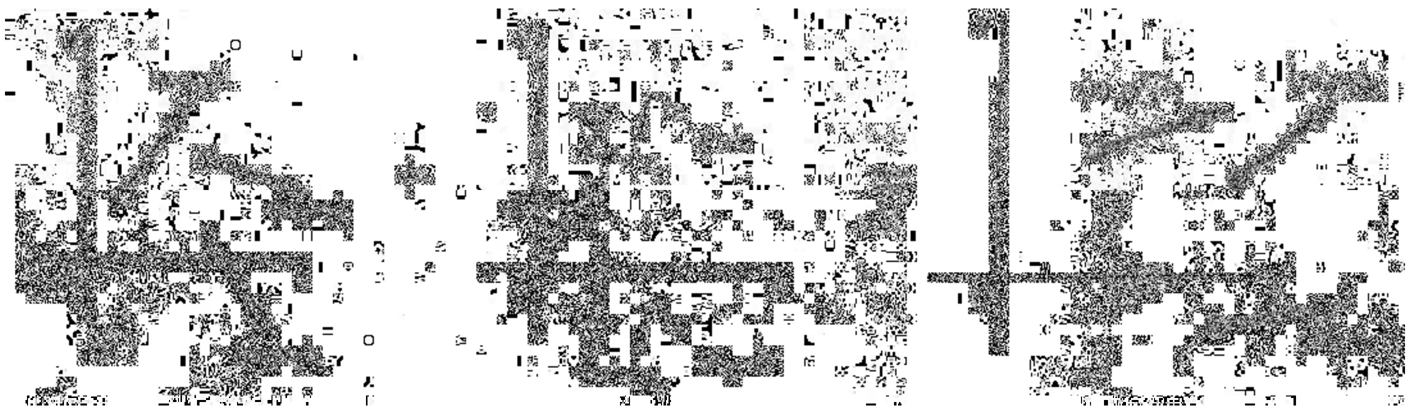
چون نیروی انفجار نیروی داخلی سیستم خمپاره و سه ترکش آن است , اندازه حرکت خطی سیستم در حین انفجار تغییر نمی کند:

$$[G_1 = G_2] \qquad mv = m_A v_A + m_B v_B + m_C v_C$$

$$20(300)\left(\frac{3}{5}\right)i = 5(99.0k) + 9(163.5)(i\cos(45°) + j\sin(45°)) + 6v_C$$

$$\boxed{v_C = 427i - 173.4j - 82.5k\ \frac{m}{s}} \qquad \boxed{v_C = \sqrt{427^2 + 173.4^2 + 82.5^2} = 468\ \frac{m}{s}}$$

Principle of Impulse and Momentum for a System of Particles اصل تکانه واندازه حرکت برای سیستم ذرات



$$\sum \vec{F} = \dot{\vec{L}} \Rightarrow \sum \vec{F} = \frac{d\vec{L}}{dt} \Rightarrow \sum \int \vec{F}dt = \vec{L}_2 - \vec{L}_1$$

$$\sum \vec{M}_O = \dot{\vec{H}}_O = \sum \int \vec{M}_O dt = \vec{H}_2 - \vec{H}_1$$

Motion of the Mass Center of a System of Particles حرکت مرکز جرم سیستم ذرات

$$m\vec{\bar{r}} = \sum m_i \vec{r}_i \Rightarrow \begin{cases} m\bar{x} = \sum m_i x_i \\ m\bar{y} = \sum m_i y_i \\ m\bar{z} = \sum m_i z_i \end{cases}$$

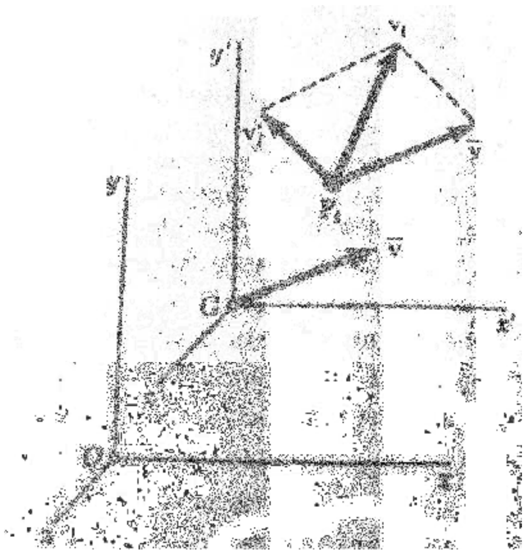
با مشتق گیری ⟶ $m\dot{\vec{\bar{r}}} = \sum m_i \dot{\vec{r}}_i \Rightarrow m\vec{\bar{v}} = \sum m_i \vec{v}_i = \vec{L} \Rightarrow \boxed{\vec{L} = m\bar{v}}$

با مشتق گیری مجدد ⟶ $\boxed{\dot{\vec{L}} = m\vec{\bar{a}} = \sum \vec{F}_i}$

Angular Momentum of a System of Particles about It’s Mass Center

اندازه حرکت زاویه ای سیستم ذرات حول مرکز جرم

- اگر مرکز دستگاه مختصات $G_{x'y'z'}$ را روی مرکز جرم سیستم ذرات طوری تعریف کنیم که نسبت به دستگاه مختصات O_{xyz} حرکت انتقالی داشته باشد، می توان نشان داد که اگرچه این دستگاه مختصات یک قاب نیوتنی نیست ولی روابط پایه ای حرکت در مورد آن صادق است.اگر بردارها را درسیستم مختصات $G_{x'y'z'}$ با نماد پرایم و اندازه حرکت زاویه ای حول مرکز جرم را با زیروند G نشان دهیم داریم:



$$\vec{H}_G' = \sum \vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_i' \qquad \vec{a}_i = \vec{\bar{a}} + \vec{a}_i'$$

$$\dot{\vec{H}}_G' = \sum \vec{r}_i' \times m_i \underbrace{\dot{\vec{v}}_i'}_{\vec{a}_i'} = \sum \vec{r}_i' \times m_i \vec{a}_i - \underbrace{\sum \vec{r}_i' \times m_i \overset{\text{ثابت}}{\vec{\bar{a}}}}_{\sum \vec{r}_i'(m_i) = m\vec{\bar{r}}' = 0}$$

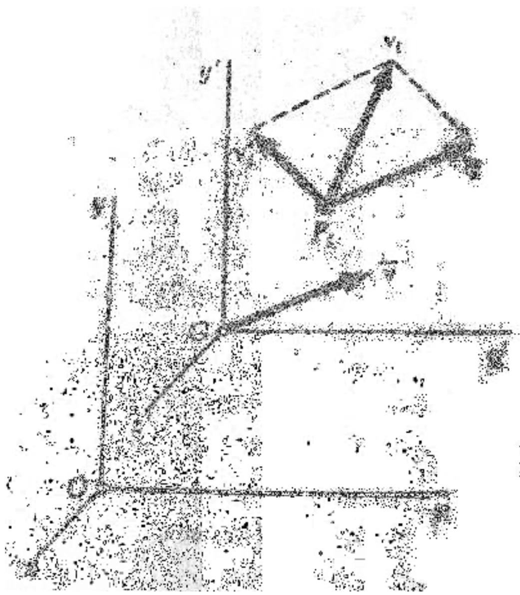
$$\Rightarrow \quad \dot{\vec{H}}_G' = \sum \vec{r}_i' \times m_i \vec{a}_i = \sum \vec{r}_i' \times \left(\sum_j \vec{f}_{ij} + \sum \vec{F}_i\right) = \sum \vec{r}_i' \times \sum \vec{F}_i = \sum \vec{M}_G \quad \Rightarrow \quad \boxed{\dot{\vec{H}}_G' = \sum \vec{M}_G}$$

$$\vec{v}_i = \vec{\bar{v}} + \vec{v}_i' \quad , \quad \vec{H}_G = \sum \vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_i = \underbrace{\sum \vec{r}_i' \times m_i}_{\text{مرکز جرم در این سیستم صفر است}} \overset{\text{ثابت}}{\vec{\bar{v}}} + \sum \vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_i' \;\Rightarrow\; \vec{H}_G = \sum \vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_i'$$

نتایج نهایی : $\boxed{\dot{\vec{H}}_G = \dot{\vec{H}}_G' = \sum \vec{M}_G}$, $\boxed{\vec{H}_G = \vec{H}_G'}$

Kinetic Energy of a System of Particles

انرژی جنبشی سیستم ذرات



$$T = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\sum m_i \vec{v_i}\cdot\vec{v_i} \qquad , \qquad \vec{v}_i = \vec{v} + \vec{v}_i'$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2}\sum m_i(\vec{v} + \vec{v}_i')\cdot(\vec{v} + \vec{v}_i') = \frac{1}{2}\left(\sum m_i\right)\vec{v}^2 + \vec{v}\underbrace{\sum m_i \vec{v}_i'}_{m\vec{\bar{v}'} = 0} + \frac{1}{2}\sum m_i \vec{v'}_i^{\,2}$$

$$\boxed{T = \frac{1}{2} m\bar{v}^2 + \frac{1}{2}\sum m_i v_i'^2}$$

انرژی جنبشی مرکز جرم

انرژی ذرات نسبت به مرکز جرم

Work-Energy Principle Conservation of Energy for a System of Particles

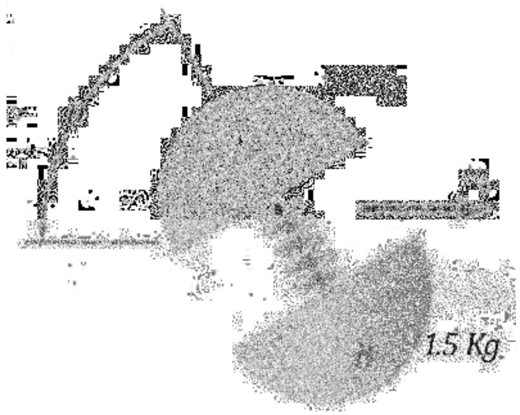
اصل کار و انرژی
پایستگی انرژی برای سیستم ذرات

- اگر کار انجام شده بر روی همه ی ذرات توسط نیروهای داخلی و خارجی را با $U_{1\to 2}$ نشان دهیم داریم:

$$T_1 + \underbrace{U_{1\to 2}}_{\text{کار انجام شده توسط نیروهای داخلی و خارجی}} = T_2$$

اگر همه ی نیروها پایستار باشند : $T_1 + V_1 = T_2 + V_2$

مثال



- دو نیم کره ی متصل به فنر در سطح بدون اصطکاک افقی قرار دارند .

$V_1=120j$ (انرژی ذخیره شده در فنر) و $v_0=8$ m/s و $\theta=30^o$

پس از جدا شدن از یکدیگر سرعت هر ذره چقدر خواهد شد ؟

پاسخ

در سیستم دو ذره:

$$m_A\vec{v}'_A + m_B\vec{v}'_B = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{v}'_B = -\frac{5}{3}\vec{v}'_A \qquad \text{I}$$

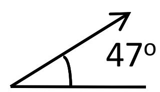
پایستگی انرژی :

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$

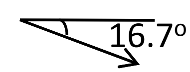
$$\Rightarrow \frac{1}{2}(4)(8)^2 + 120 = \frac{1}{2}(4)(8)^2 + \frac{1}{2}m_A {v'_A}^2 + m_B {v'_B}^2 \Rightarrow 2.5{v'_A}^2 + 1.5{v'_B}^2 = 240 \qquad \text{II}$$

$$\xrightarrow{I\ ,\ II} v'_A = 6\frac{m}{s} \quad , \quad v'_B = 10\frac{m}{s}$$

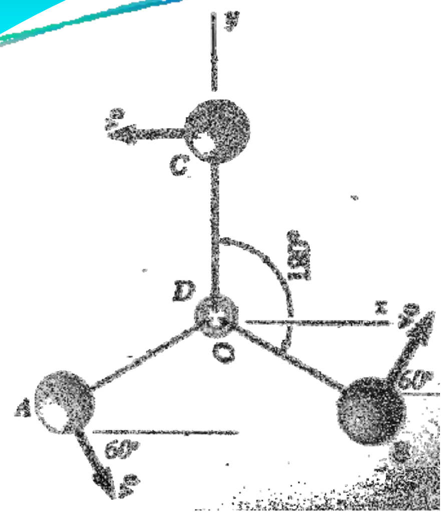
$$\begin{cases}(v_A)_x = 8 - 6\cos 30 = 2.8\frac{m}{s} \\ (v_A)_y = 6\sin 30 = 3\frac{m}{s}\end{cases} \Rightarrow \boxed{|\vec{v}_A| = 4.11\frac{m}{s}}$$



$$\begin{cases}(v_B)_x = 8 + 10\cos 30 = 16.66\frac{m}{s} \\ (v_B)_y = -10\sin 30 = -5\frac{m}{s}\end{cases} \Rightarrow \boxed{|\vec{v}_B| = 17.39\frac{m}{s}}$$



مثال



- کره ها با سرعت V_0 حول نقطه ی D در حال گردش اند. ناگهان طناب CD پاره می شود . پس از آنکه دو طناب باقیمانده مجددا کشیده شوند مطلوب است:

$(m_A=m_B=m_C=m)$

الف)سرعت حلقه ی D

ب)سرعت نسبی چرخش A,B حول D

ج)انرژی تلف شده ی سیستم وقتی طناب های AD,BD مجددا کشیده شوند .

پاسخ

$$\vec{L}_1 = m_A\vec{v}_A + m_B\vec{v}_B = mv_0(\cos 60\,\hat{i} + \sin 60\,\hat{j} + \cos 60\,\hat{i} - \sin 60\,\hat{j}) = 2mv_0\cos 60\hat{i} = mv_0\hat{i} \quad \text{I}$$

$$(\vec{H}')_{G_1} = 2(mv_0\sin 60)(l\sin 60)\hat{k} = 1.5ml\,v_0\hat{k} \quad \text{II}$$

پس از کشیده شدن طناب های AD , BD :

$$\vec{L}_2 = 2m\vec{v}_D \quad \text{III} \qquad (\vec{H}')_{G_2} = 2mlv'\hat{k}$$

$$\vec{L}_1 = \vec{L}_2 \Rightarrow 2m\vec{v}_D = mv_0\hat{i} \Rightarrow \boxed{\vec{v}_D = \frac{1}{2}v_0\hat{i}}$$

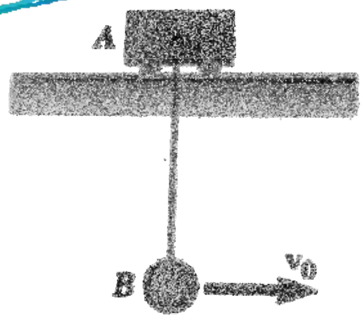
$$(\vec{H}')_{G_1} = (\vec{H}')_{G_2} \Rightarrow 2mlv' = 1.5mlv_0 \Rightarrow \boxed{v' = \frac{3}{4}v_0}$$

$$T_1 = 3\left(\frac{1}{2}mv_0^2\right) = \frac{3}{2}mv_0^2$$

$$T_2 = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}(2m)(v_D)^2 + 2\left(\frac{1}{2}mv'^2\right) = 1.3125mv_0^2$$

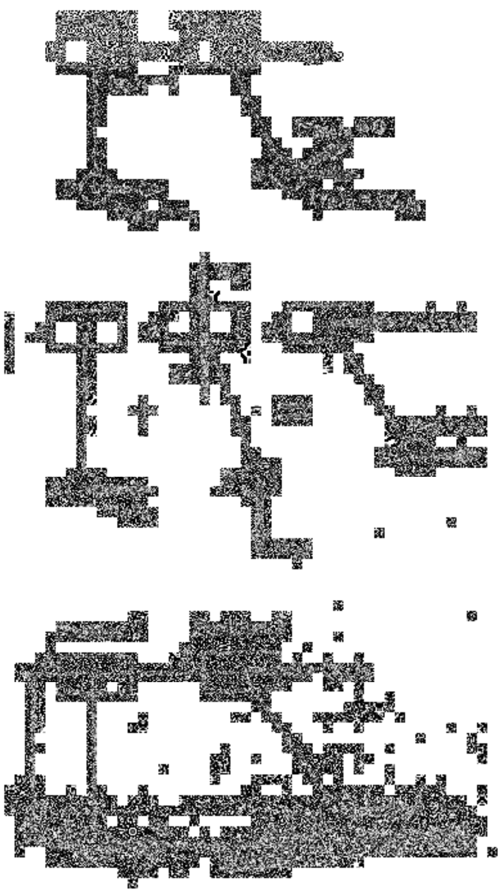
$$\Rightarrow \boxed{\text{درصد اتلاف} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \times 100 = 12.5\%}$$

مثال



- گلوله B به جرم m_B از طنابی به طول l که این طناب به ارابه A به جرم m_A متصل است، آویزان است. ارابه می تواند آزادانه در مسیر افقی بدون اصطکاک حرکت کند. ارابه در حالت سکون بوده و به گلوله سرعت اولیه افقی v_0 داده می شود، مطلوب است :
- الف) سرعت گلوله وقتی در بالاترین ارتفاع قرار دارد .
- ب) ارتفاع (h) ماکزیمم گلوله
- (فرض می شود $v_0^2 < 2gl$)

پاسخ



Position 1: $(v_A)_1 = 0 \quad (v_B)_1 = v_0$

Position 2: (B @ Max. Elevation) $(v_{B/A})_2 = 0$

$$\Rightarrow \quad (v_B)_2 = (v_{B/A})_2 + (v_A)_2 = (v_A)_2$$

Conservation of Linear Momentum in x Direction:

$$m_B v_0 = (m_A + m_B)(v_A)_2$$

$$\Rightarrow (v_A)_2 = \frac{m_B}{m_A + m_B} v_0 \Rightarrow (v_B)_2 = (v_A)_2 = \frac{m_B}{m_A + m_B} v_0 \longrightarrow \quad (I)$$

$$V_1 = -m_A g l \qquad V_2 = -m_A g l + m_B g l$$

Position 1: $T_1 = \frac{1}{2} m_B v_0^2$ *Position 2:* $T_2 = \frac{1}{2}(m_A + m_B)(v_A)_2^2$

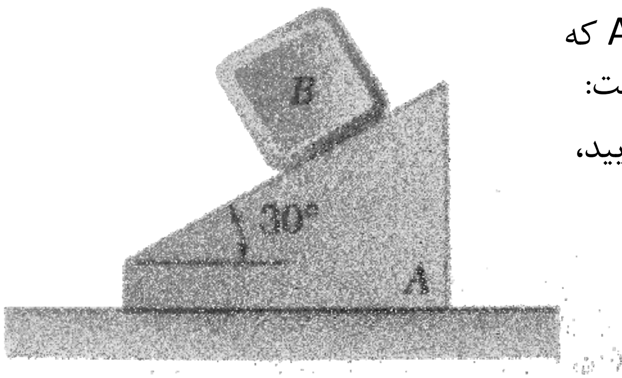
Conservation of Energy: $T_1 + V_1 = T_2 + V_2$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m_B v_0^2 + m_A g l = \frac{1}{2}(m_A + m_B)(v_A)_2^2 + (m_A + m_B)(v_A)_2^2$$

$$\Rightarrow h = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{m_A + m_B}{m_B}\frac{(v_A)_2^2}{2g} \qquad I \Rightarrow h = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{m_B}{m_A + m_B}\frac{v_0^2}{2g}$$

$$\Rightarrow h = \frac{m_A}{m_A + m_B}\frac{v_0^2}{2g}$$

مثال



- بلوک ۶ کیلوگرمی B از حال سکون شروع به لغزیدن روی گوه ی ۱۰ کیلوگرمی A که روی یک سطح افقی قرار دارد می کند، اگر از اصطکاک صرف نظر شود، مطلوب است:
- الف) سرعت B نسبت به A پس از آنکه یک متر روی سطح شیب دار گوه پایین بیایید،
- ب) سرعت A در همان لحظه.

پاسخ

برای بلوک :

$$+\nwarrow \sum F = ma: \qquad N_1 - m_B g\cos 30° = -m_B a_A \sin 30°$$

$$\overset{+}{\leftarrow} \sum F = ma: \qquad N_1 \sin 30° = m_B a_{B/A} \cos 30° - m_B a_A$$

برای گوه :

$$\overset{+}{\rightarrow} \sum F = ma: \qquad N_1 \sin 30° = m_A a_A$$

با استفاده از سه رابطه ی فوق:

$$\begin{cases} N_1 + (6\sin 30°)a_A = (6)(9.81)\cos 30° \\ (\sin 30°)N_1 + 6a_A - (6\cos 30°)a_{B/A} = 0 \\ (\sin 30°)N_1 - 10a_A = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N_1 = 44.325\,\text{N} \\ a_A = 2.2163\ \text{m/s}^2 \\ a_{B/A} = 6.8243\ \text{m/s}^2 \end{cases}$$

$$\frac{(v_{B/A})^2}{2} = a_{B/A}s_{B/A} \Rightarrow v_{B/A} = \sqrt{2a_{B/A}s_{B/A}} = \sqrt{(2)(6.8243)(1.0)} = 3.6944\ \text{m/s}$$

$$\boxed{v_{B/A} = 3.69\ \text{m/s} \measuredangle 30°}$$

$$t = \frac{v_{B/A}}{a_{B/A}} = \frac{3.6944}{6.8243} = 0.54136\ \text{s} \Rightarrow v_A = a_A t = (2.2163)(0.54136) = 1.1998\ \text{m/s}$$

$$\boxed{v_A = 1.200\ \text{m/s} \rightarrow}$$

Chapter Review

مرور فصل

مومنتم (اندازه حرکت) وتکانه

- بقای اندازه حرکت
- اصل تکانه و اندازه ی حرکت برای سیستم ذرات

تعمیم یافته ی قانون دوم نیوتن

مرکز جرم

- اندازه حرکت زاویه ای حول مرکز جرم

کار و انرژی

- انرژی جنبشی سیستم ذرات
- اصل کار و انرژی

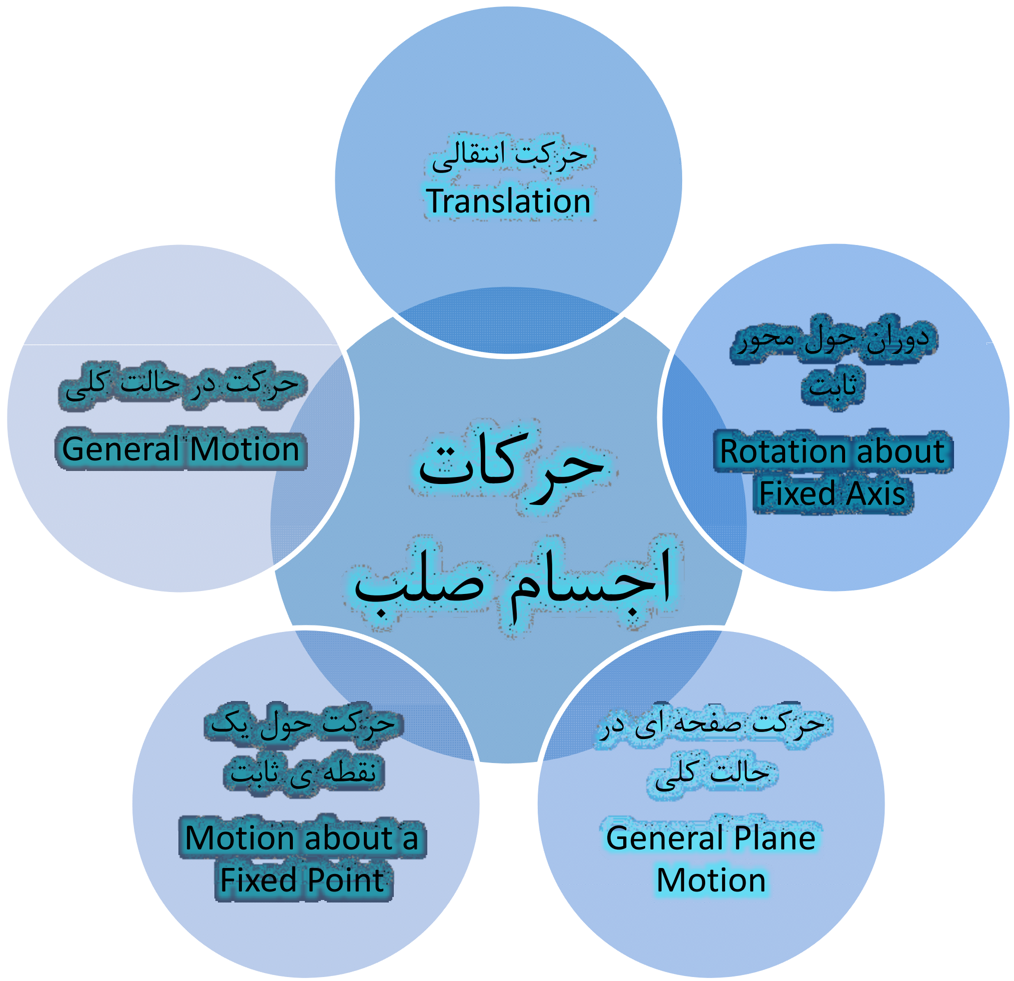
PLANE KINEMATICS OF RIGID BODIES سینماتیک اجسام صلب در صفحه

فصل ۵

- معرفی انواع حرکات اجسام صلب
  - انتقالی
  - دوران حول یک محور ثابت
  - حرکت حول یک نقطه ی ثابت
  - حرکت در حالت کلی
  - حرکت صفحه ای
- حرکت انتقالی
- دوران حول یک محور ثابت
  - سرعت وشتاب مطلق
  - سرعت و شتاب زاویه ای بر حسب زمان
- حرکت صفحه ای
  - سرعت نسبی
  - مرکز آنی دوران
  - شتاب نسبی
- حرکت نسبت به مرجع دوار
  - شتاب کوریولیس

Introduction to Various Types of Rigid-Body Motion

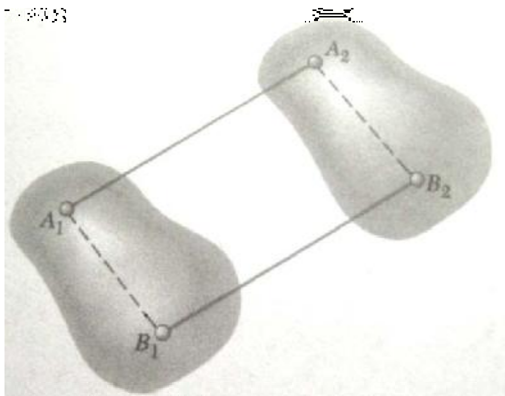
معرفی انواع حرکات اجسام صلب

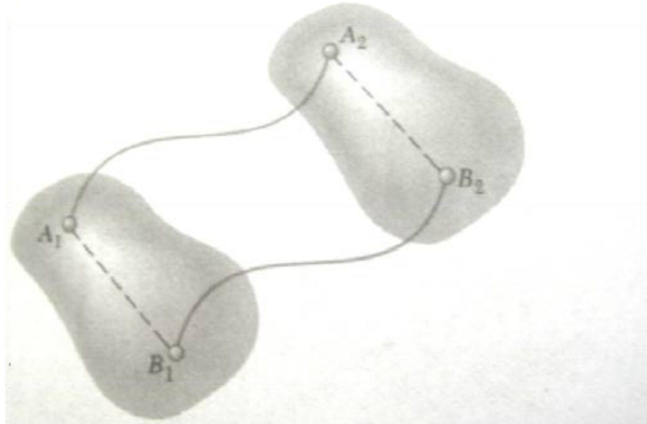


معرفی حرکت انتقالی

Introduction to Translation

- اگر در ضمن حرکت هر خط راستی درون جسم صلب، امتداش را حفظ کند، به آن حرکت حرکت انتقالی گفته می شود.
- به عبارتی دیگر، همه ی ذرات جسم صلب در مسیر های موازی حرکت می کنند.
- اگر این مسیرهای حرکت موازی باشند، به آن حرکت انتقالی مستقیم الخط (Rectilinear Translation) و در غیر این صورت به آن حرکت انتقالی منحنی الخط (Curvilinear Translation) گفته می شود.

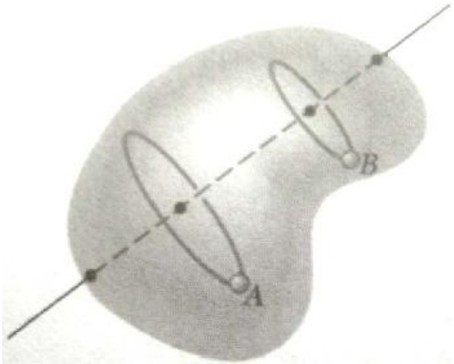




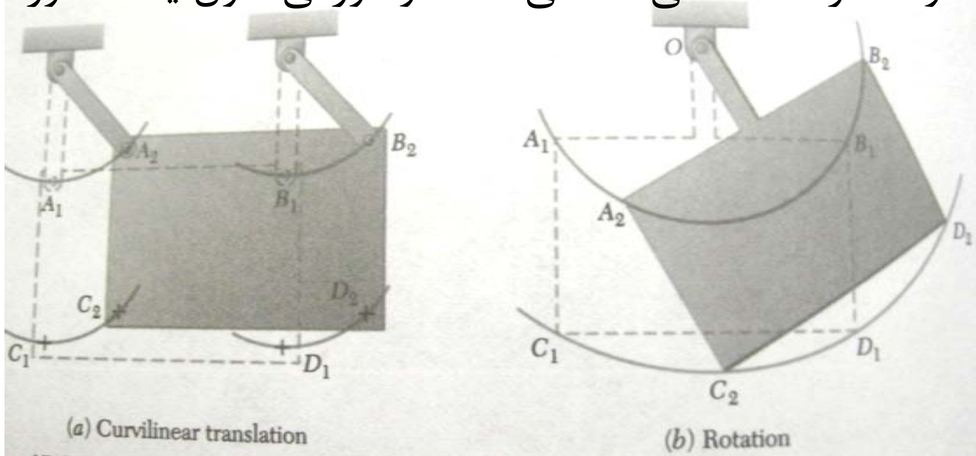
Introduction to Rotation about a Fixed Axis

معرفی دوران حول یک محور ثابت

- در این نوع حرکت، ذرات تشکیل دهنده ی جسم صلب در صفحاتی موازی، طی مسیرهای دایره ای حول یک محور ثابت دوران می کنند.



- اگر محور دوران جسم صلب را قطع نماید، ذراتی که روی محور قرار می گیرند، سرعت و شتاب صفر خواهند داشت.
- شکل زیر گویای تفاوت حرکت انتقالی منحنی الخط و دورانی حول یک محور ثابت می باشد:



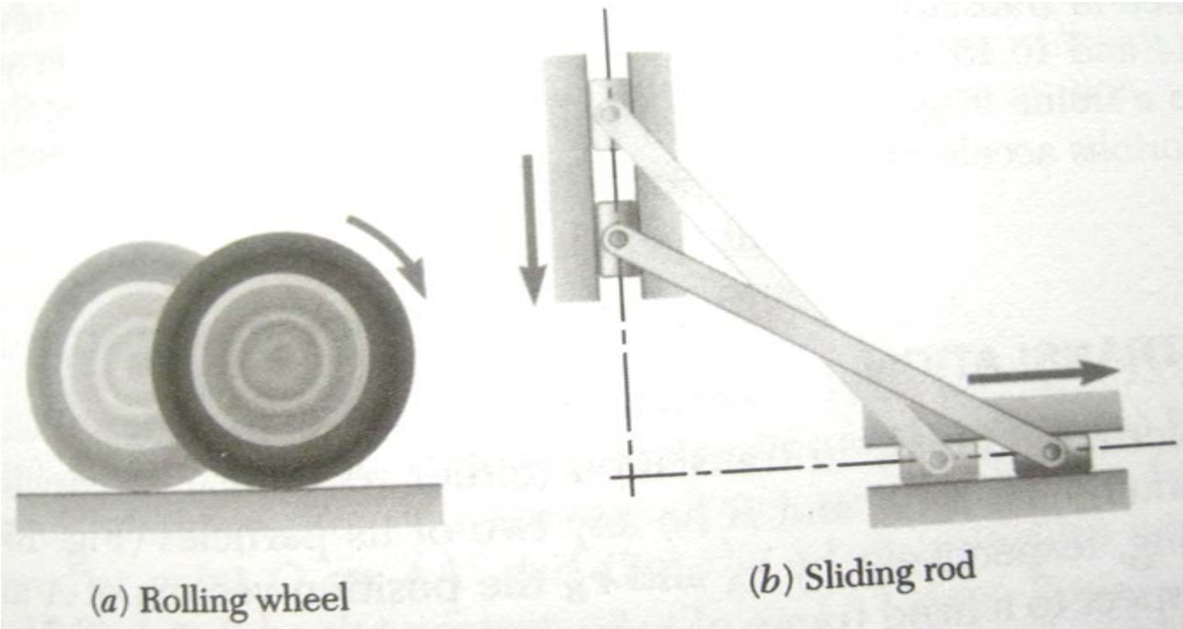
(a) Curvilinear translation

(b) Rotation

Introduction to General Plane Motion

معرفی حرکت صفحه ای در حالت کلی

- به حرکت صفحه ایی اطلاق می شود که در هیچ یک از دسته بندی های حرکت انتقالی و دورانی حول یک محور ثابت قرار نگیرد، بلکه ترکیبی از این دو باشد.
- شکل زیر دو نمونه از این نوع حرکت را نشان می دهد:



(a) Rolling wheel

(b) Sliding rod

Introduction to

1.Motion about a Fixed Point &

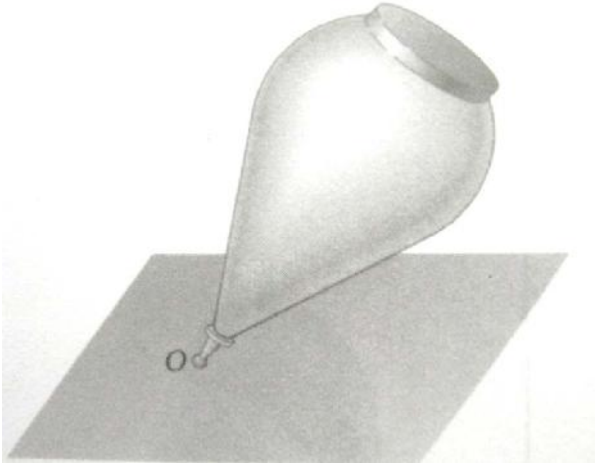
2.General Motion

معرفی

۱. حرکت حول یک نقطه ی ثابت

۲. حرکت در حالت کلی

- حرکت حول یک نقطه ی ثابت، به حرکت سه بعدی جسم صلب متصل شده به یک نقطه ی ثابت گفته می شود. مانند حرکت یک فرفره



- منظور از حرکت در حالت کلی ، هر حرکتی است که در چهار دسته ی قبلی قرار نمی گیرد.
- در مباحث این ترم به بررسی سه نوع حرکت انتقالی، دوران حول یک نقطه ی ثابت و حرکت صفحه ای در حالت کلی بسنده می نماییم.

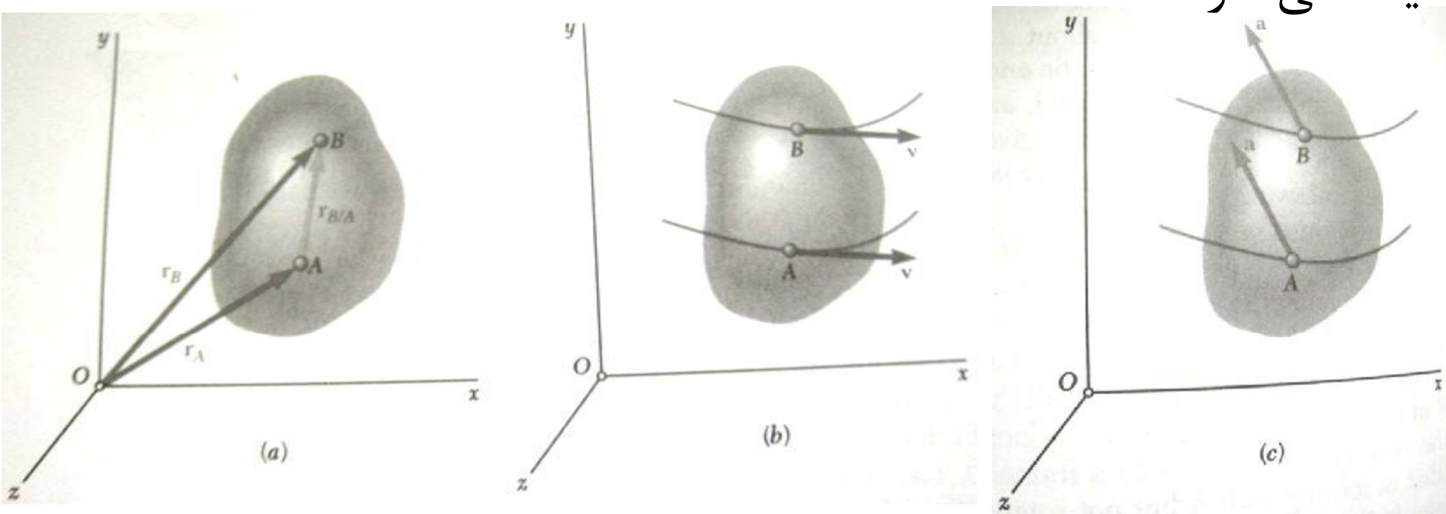
Translation حرکت انتقالی

- اگر بردارهای مکان دو ذره ی A و B از جسم صلب را در نظر بگیریم، داریم:

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{V}_{B/A}$$

$$\left.\begin{aligned} \vec{V}_B &= \vec{V}_A + \cancelto{0}{\vec{V}_{B/A}} \\ \vec{a}_B &= \vec{a}_A + \cancelto{0}{\vec{a}_{B/A}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \vec{V}_B = \vec{V}_A \\ \vec{a}_B = \vec{a}_A \end{cases}$$

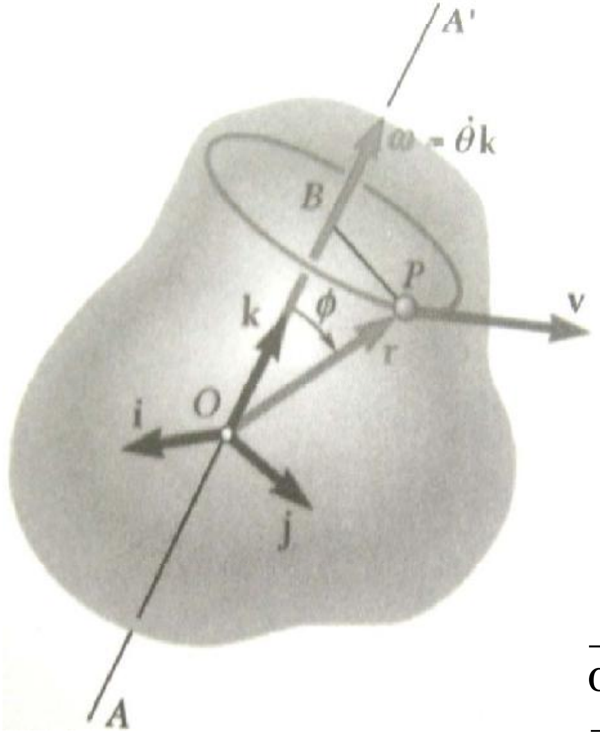
- با توجه به تعریف حرکت انتقالی جهت بردار $\mathbf{r}_{B/A}$ ثابت می ماند، همچنین اندازه ی آن نیز به علت متعلق بودن A و B به جسم صلب نمی تواند تغییر کند.
- بنابراین، در حرکت انتقالی، همه ی ذرات تشکیل دهنده ی جسم صلب، سرعت و شتاب یکسانی دارند.



(a) (b) (c)

Absolute Velocity & Acceleration
Rotation about a Fixed Axis

سرعت و شتاب مطلق
دوران حول یک محور ثابت



$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{\overline{BP}d\theta}{dt} = r\sin\phi\frac{d\theta}{dt}$$

$$v = r\sin\phi\,\omega$$

$$\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{r}$$

تعریف سرعت زاویه ای $\vec{\omega} = \omega\hat{k}$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(\vec{\omega}\times\vec{r})}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times\underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt}}_{\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{r}}$$

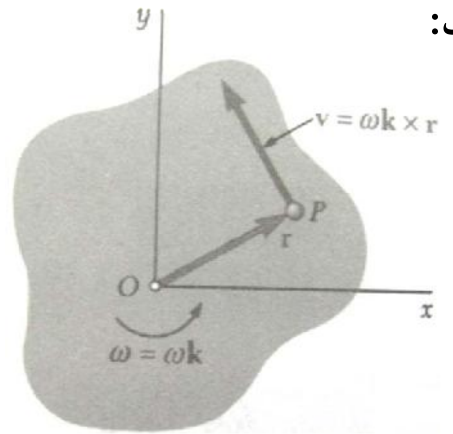
تعریف شتاب زاویه ای $\vec{\alpha} = \alpha\hat{k}$

$$\vec{a} = \underbrace{\vec{\alpha}\times\vec{r}}_{\text{مولفه ی مماس شتاب } a_t} + \underbrace{\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})}_{\text{مولفه ی نرمال (شعاعی) } a_n}$$

Absolute Velocity & Acceleration (in Rotation of a Representative slab)

سرعت و شتاب مطلق در چرخش یک دال (قاچ)

- دوران یک جسم صلب حول یک محور ثابت را می توان به صورت حرکت یک دال در سیستم مختصات عمود بر محور دوران، تعریف کرد. در این صورت روابط سرعت و شتاب مطلق به صورت زیر ساده می شوند:

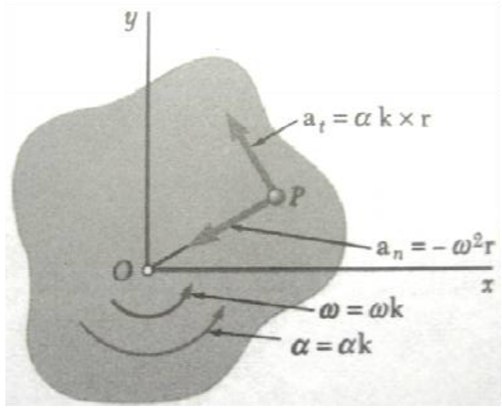


$$\vec{v} = \omega \hat{k} \times \vec{r} \Rightarrow |\vec{v}| = r\omega$$

$$\vec{a} = \underbrace{(\alpha \hat{k}) \times \vec{r}}_{a_n} - \underbrace{\omega^2 \vec{r}}_{a_t}$$

بـراي ذره :

$$\begin{cases} a_t = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d(r\omega)}{dt} = r\alpha \\ a_n = \dfrac{v^2}{r} = \dfrac{(r\omega)^2}{r} = r\omega^2 \end{cases}$$



Equations Defining the Rotation of a Rigid Body about a Fixed Axis

معادلات حاکم بر چرخش جسم صلب حول یک محور ثابت

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{d\theta}\underbrace{\frac{d\theta}{dt}}_{\omega} \Rightarrow \alpha = \omega\frac{d\omega}{d\theta} \Rightarrow \alpha d\theta = \omega d\omega$$

- دوحالت خاص:

۱ : سرعت زاویه ای ثابت :

$$\theta = \omega t + \theta_0$$

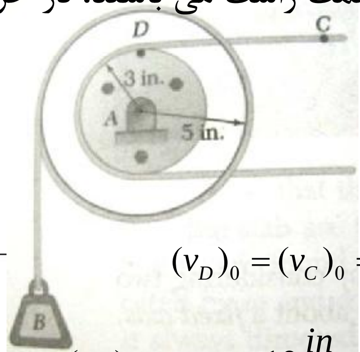
۲ : شتاب زاویه ای ثابت :

$$\omega = \alpha t + \omega_0 \ , \ \theta = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \omega_0 t + \theta_0$$

$$\omega^2 - \omega_0{}^2 = 2\alpha(\theta - \theta_0)$$

مثال

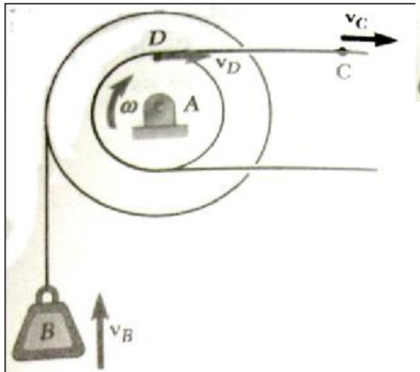
- بار B توسط کابل ناکشسانی به یک قرقره ی دوبل متصل شده است. حرکت قرقره توسط کابل ناکشسان C کنترل می شود. اگر نقطه ی C با شتاب ثابت $9in/s^2$ و سرعت اولیه ی 12in/s که هردو به سمت راست می باشند، در حرکت باشد، مطلوب است:
- الف) تعداد دوران های کامل قرقره در ۲ ثانیه.
- ب) سرعت و جابجایی بار بعد از گذشت ۲ ثانیه.
- ج) شتاب نقطه ی D که برروی محیط قرقره ی کوچکتر قرار دارد.



پاسخ :

الف)

$$(v_D)_0=(v_C)_0=12\frac{in}{s}\rightarrow \qquad (a_D)_t=a_C=9\frac{in}{s^2}\rightarrow$$



$$(v_D)_0=r\omega_0=12\frac{in}{s}=(3in)\omega_0\Rightarrow\omega_0=4\frac{rad}{s} \qquad (a_D)_t=r\alpha=9\frac{in}{s^2}=(3in)\alpha\Rightarrow\alpha=3\frac{rad}{s^2}$$

برای t=2 s :

$$\omega=\omega_0+\alpha t=4\frac{rad}{s}+(3\frac{rad}{s^2})(2s)=10\frac{rad}{s}\Rightarrow\omega=10\frac{rad}{s}$$

$$\theta=\omega_0 t+\frac{1}{2}\alpha t^2=(4\frac{rad}{s})(2s)+\frac{1}{2}(3\frac{rad}{s^2})(2s)^2=14rad\Rightarrow\theta=14rad$$

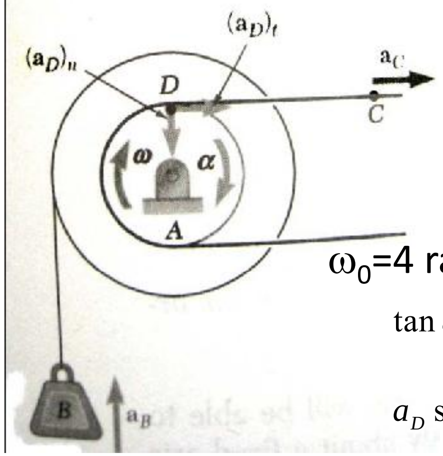
تعداد دوران ها $=(14rad)(\frac{1rev}{2\pi rad})=2.23rev$

ب)

$$v_B=r\omega=(5in)(10\frac{rad}{s})=50\frac{in}{s}\Rightarrow v_B=50\frac{in}{s}$$

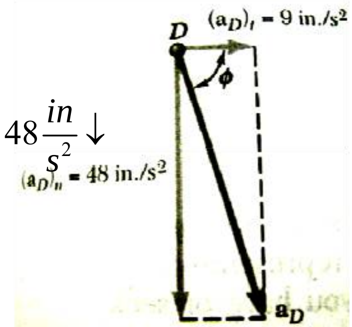
$$\Delta y_B=r\theta=(5in)(14rad)=70in\Rightarrow\Delta y_B=70in \quad upward$$

ج)



$$(a_D)_t=a_C=9\frac{in}{s^2}\rightarrow$$

ω_0=4 rad/s , t=0 در $(a_D)_n=r_D\omega_0^2=(3in)(4\frac{rad}{s})^2=48\frac{in}{s^2}\Rightarrow(a_D)_n=48\frac{in}{s^2}\downarrow$



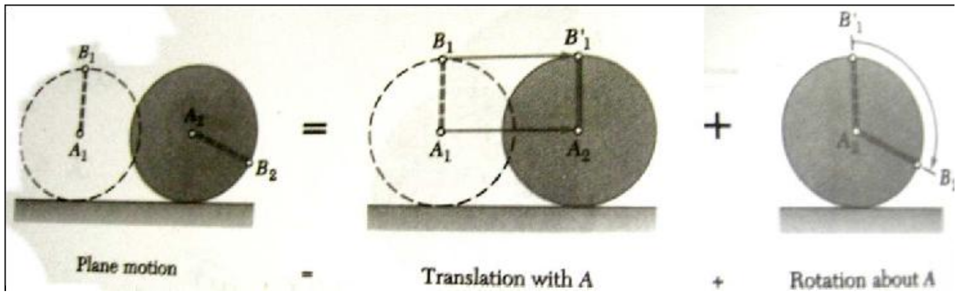
$$\tan\phi=\frac{48}{9}\Rightarrow\phi=79.4^o$$

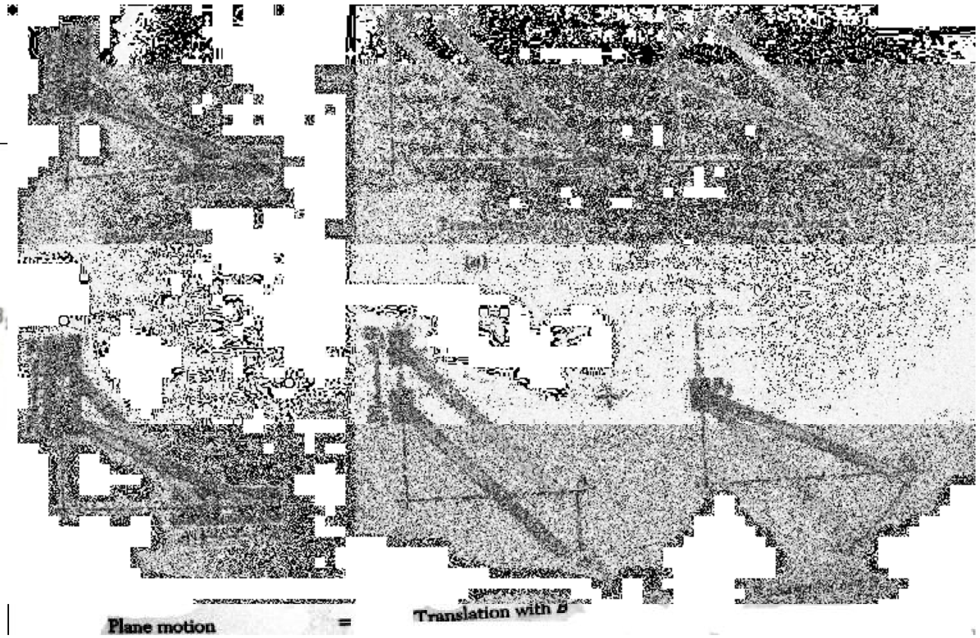
$$a_D\sin 79.4^o=48\frac{in}{s^2}\Rightarrow a_D=48.8\frac{in}{s^2}$$

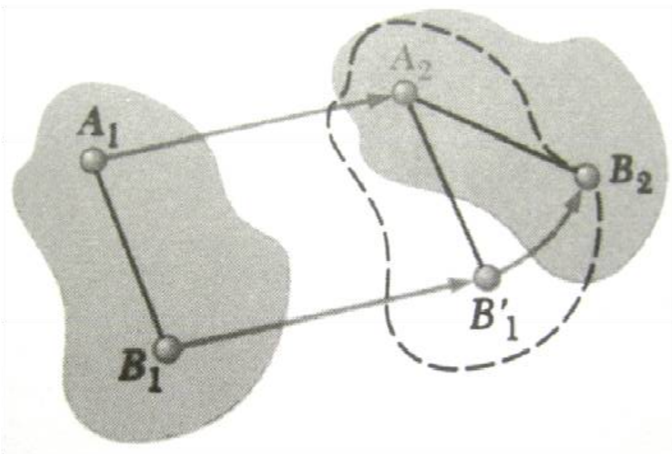
79.4°

General Plane Motion حرکت صفحه ای در حالت کلی

- حرکت صفحه ای در حالت کلی را می توان به صورت ترکیبی از انتقال و دوران در نظر گرفت. به شکل های زیر توجه نمایید:







- در حالت کلی جابجایی کوچکی را در نظر می گیریم که دو ذره ی A و B را از موقعیت A_1 و B_1 به موقعیت A_2 و B_2 می رساند. این جابجایی را می توان متشکل از دو بخش انتقال از موقعیت اولیه به A_2 و B'_1 و دوران حول A_2 از B'_1 به B_2 در نظر گرفت:

Relative Velocity in Plane Motion

سرعت نسبی در حرکت صفحه ای

روش های مختلف حل مسائل شامل سرعت نسبی

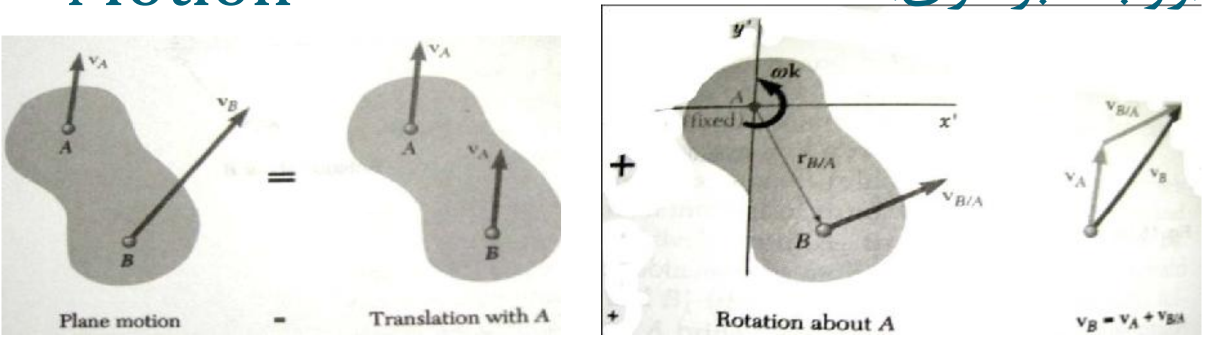
استفاده از روابط برداری

مشتق گیری از معادلات سازگاری

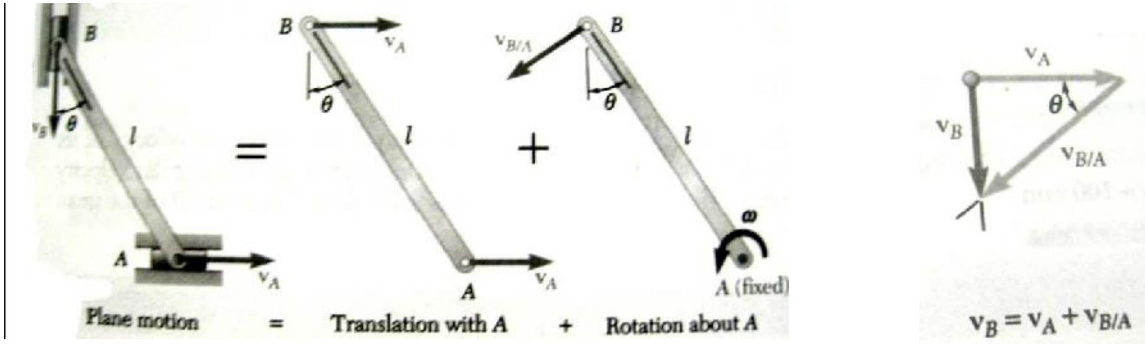
مرکز آنی دوران

Relative Velocity in Plane Motion

سرعت نسبی در حرکت صفحه ای (روابط برداری)



$$\left.\begin{aligned}\vec{V}_B &= \vec{V}_A + \vec{V}_{B/A} \\ \vec{V}_{B/A} &= \omega\hat{k}\times\vec{r}_{B/A}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{V}_B = \vec{V}_A + \omega\hat{k}\times\vec{r}_{B/A}$$

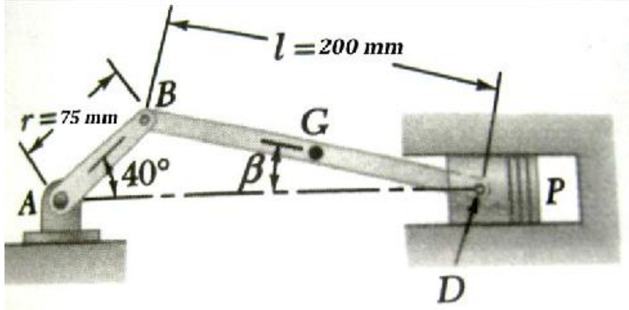


$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{B/A} \qquad V_B = V_A \tan\theta$$

$$\omega = \frac{V_{B/A}}{l} = \frac{(V_A{}^2 + V_B{}^2)^{\frac{1}{2}}}{l} = \frac{V_A(1+\tan^2\theta)^{\frac{1}{2}}}{l} = \frac{V_A}{l\cos\theta}$$

مثال

- میلنگ AB با سرعت زاویه ای ثابت 2000rpm در جهت عقربه های ساعت می چرخد. سرعت زاویه ای BC (ω_{BC}) و سرعت حرکت پیستون (V_C) را بدست آورید.



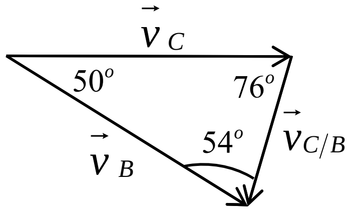
پاسخ :

$$\omega_{AB} = 2000\frac{2\pi}{60} = 209.4\frac{rad}{\sec}$$

$$v_B = \overline{AB}\omega_{AB} = (0.075)(209.4) = 15.7\frac{m}{s}$$

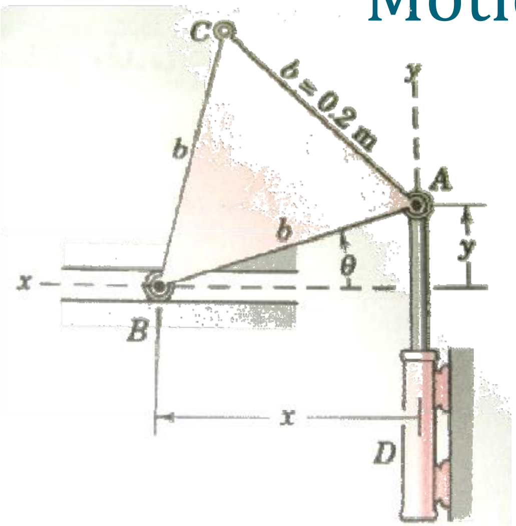
$$\frac{\sin\beta}{75} = \frac{\sin 40}{200} \Rightarrow \beta = 14^o$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{v}_C = \vec{v}_B + \vec{v}_{C/B} \\ \dfrac{\sin 50}{v_{C/B}} = \dfrac{\sin 76}{\underbrace{v_B}_{15.7}} = \dfrac{\sin 54}{v_C}\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}v_{C/B} = 12.39\dfrac{m}{s} \\ v_C = 13.08\dfrac{m}{s}\end{array}\right. \Rightarrow \omega_{BC} = \frac{v_{C/B}}{\left|\overline{BC}\right|} = \frac{12.39}{0.2} = 62\frac{rad}{s}$$



Relative Velocity in Plane Motion

مثال سرعت نسبی در حرکت صفحه ای (مشتق گیری از روابط سازگاری)



- حرکت صفحه ی مثلث متساوی الاضلاع ABC توسط سیلندر هیدرولیکی D کنترل می شود. اگر پیستون با سرعت ثابت 0.3 m/s به سمت بالا حرکت کند، برای θ=30° سرعت مرکز غلتک B و سرعت زاویه ای ضلع CB را بدست آورید.

پاسخ :

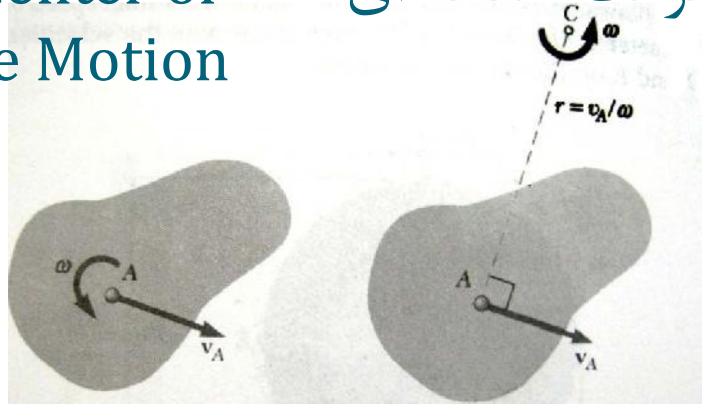
داریم : $v_A = \dot{y} = 0.3\frac{m}{s}$, $y = b\sin\theta$, $x = b\cos\theta$

$$x^2 + y^2 = b^2 \overset{\text{مشتق گیری}}{\Rightarrow} x\dot{x} + y\dot{y} = 0 \Rightarrow \dot{x} = -\frac{y}{x}\dot{y} \Rightarrow v_B = \dot{x} = -v_A\tan\theta = -0.3(\frac{1}{\sqrt{3}}) = -0.1732\frac{m}{s}$$

$$\dot{y} = b\dot{\theta}\cos\theta \quad , \quad \omega = \dot{\theta} = \frac{v_A}{b}\sec\theta \Rightarrow \omega = \frac{0.3}{0.2}\frac{2}{\sqrt{3}} = 1.732\frac{rad}{s}$$

Instantaneous Center of Rotation in Plane Motion

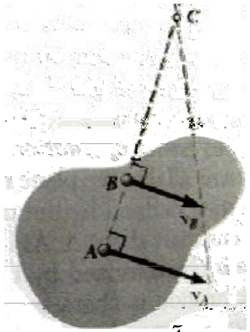
مرکز آنی دوران در حرکت صفحه ای

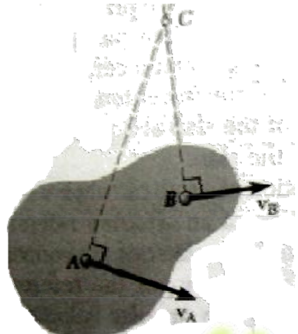


روش های بدست آوردن مرکز آنی دوران

محل تقاطع خطوط عمود بر بردارهای سرعت دو نقطه ی متمایز از جسم صلب

اگر خطوط عمود بر بردارهای سرعت دو نقطه بر هم منطبق شوند، محل تقاطع این خط با خطی که انتهای دو بردار سرعت را به هم متصل می سازد





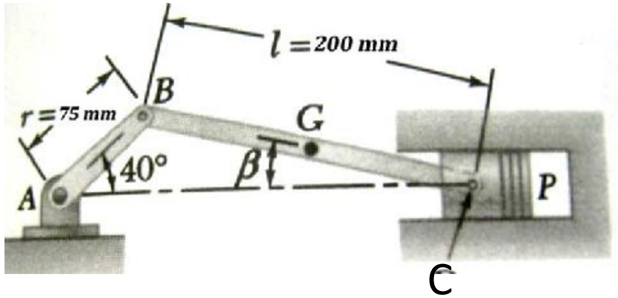
دو حالت خاص:

در دوران حول یک محور ثابت، مرکز آنی دوران همواره بر آن محور منطبق خواهد بود.

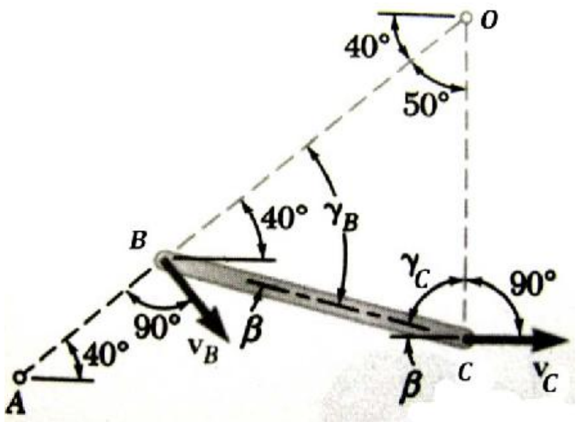
در صورتی که مرکز آنی دوران در بینهایت قرار گیرد، دوران نداریم و حرکت انتقالی می باشد.

مثال(تکرار)

- میلنگ AB با سرعت زاویه ای ثابت 2000rpm در جهت عقربه های ساعت می چرخد. سرعت زاویه ای BC (ω_{BC}) و سرعت حرکت پیستون (V_C) را بدست آورید.



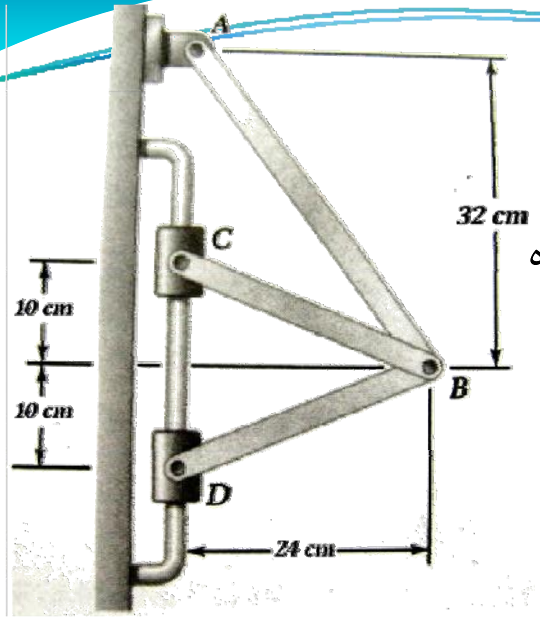
پاسخ :



$$\frac{\sin 50}{\overline{BC}} = \frac{\sin 76}{\overline{OB}} = \frac{\sin 54}{\overline{OC}} \Rightarrow \begin{cases} \overline{OB} = 253.4mm \\ \overline{OC} = 211.1mm \end{cases}$$

$$\omega_{BC} = \frac{v_B}{\overline{OB}} = \frac{15.7}{0.253} = 62.0\frac{rad}{s} \Rightarrow v_C = \overline{OC}\omega_{BC} = 0.211 \times 62.0\frac{m}{s} = 13.08\frac{m}{s}$$

مثال



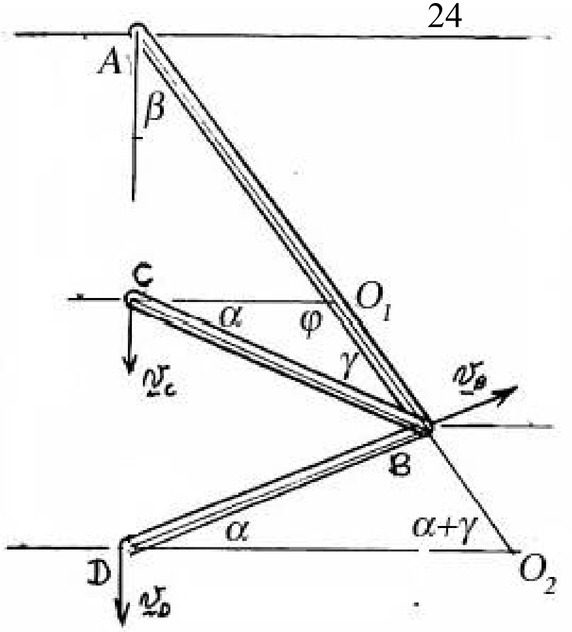
- دو طوقه ی C و D به صورت عمودی در طول میله ی نشان داده شده حرکت می کنند. سرعت طوقه C , 33 in/s است . مطلوب است :

الف)سرعت زاویه ای عضو AB

ب)سرعت طوقه D

پاسخ :

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{10}{24} = 22.6^o \qquad \beta = \tan^{-1}\frac{24}{32} = 36.9^o \qquad \gamma = 90-(\alpha+\beta) = 30.51^o \Rightarrow \phi = 126.9^o$$



$$\frac{\sin\alpha}{\overline{O_1B}} = \frac{\sin\gamma}{\overline{O_1C}} = \frac{\sin\phi}{\overline{BC}} \Rightarrow \begin{cases} \overline{O_1B} = 12.5cm \\ \overline{O_1C} = 16.5cm \end{cases} \Rightarrow \omega_{BC} = \frac{v_C}{\overline{O_1C}} = \frac{66}{16.5} = 4\frac{rad}{s}$$

$$v_B = \overline{O_1B} \times \omega_{BC} = 50\frac{cm}{s} \qquad \omega_{AB} = \frac{v_B}{|\overline{AB}|} = \frac{50}{40} = 1.25\frac{rad}{s}$$

$$\overset{\Delta}{BDO_2} : \frac{\overline{OB}}{\sin(\alpha+\gamma)} = \frac{\overline{O_2B}}{\sin\alpha} = \frac{\overline{O_2D}}{\sin(180-2\alpha-\gamma)} \Rightarrow \begin{cases} \overline{O_1B} = 12.5cm \\ \overline{O_2D} = 31.5cm \end{cases}$$

$$\omega_{BD} = \frac{v_B}{\overline{O_2B}} = \frac{50}{12.5} = 4\frac{rad}{s} \qquad v_D = (\overline{O_2D})(\omega_{BD}) = 31.5 \times 4 = 126\frac{cm}{s}$$

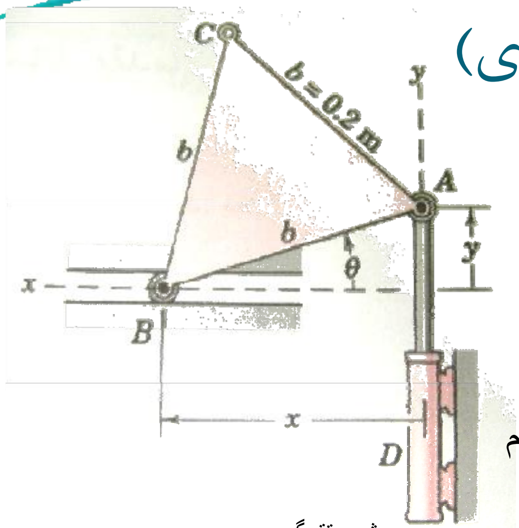
Relative Acceleration in Plane Motion

شتاب نسبی در حرکت صفحه ای

مشتق گیری از معادلات سازگاری

استفاده از روابط برداری

مثال شتاب نسبی(روش مشتق گیری از روابط سازگاری)



- حرکت صفحه ی مثلث متساوی الاضلاع ABC توسط سیلندر هیدرولیکی D کنترل می شود. اگر پیستون با سرعت ثابت 0.3 m/s به سمت بالا حرکت کند، برای θ=30° شتاب مرکز غلتک B و شتاب زاویه ای ضلع CB را بدست آورید.

پاسخ : داریم : $v_A=\dot y=0.3\frac{m}{s}$, $a_A=\ddot y=0$, $y=b\sin\theta$, $x=b\cos\theta$

$$x^2+y^2=b^2 \overset{\text{مشتق گیری}}{\Rightarrow} x\dot x+y\dot y=0\Rightarrow \dot x=-\frac{y}{x}\dot y \Rightarrow v_B=\dot x=-v_A\tan\theta=-0.3(\frac{1}{\sqrt{3}})=-0.1732\frac{m}{s}$$

$$x\dot x+y\dot y=0 \overset{\text{مشتق گیری}}{\Rightarrow} x\ddot x+\dot x^2+y\ddot y+\dot y^2=0\Rightarrow \ddot x=-\frac{\dot x^2+\dot y^2}{x}-\frac{y}{x}\ddot y \Rightarrow a_B=\ddot x=-\frac{v_A^2}{b}\sec^3\theta$$

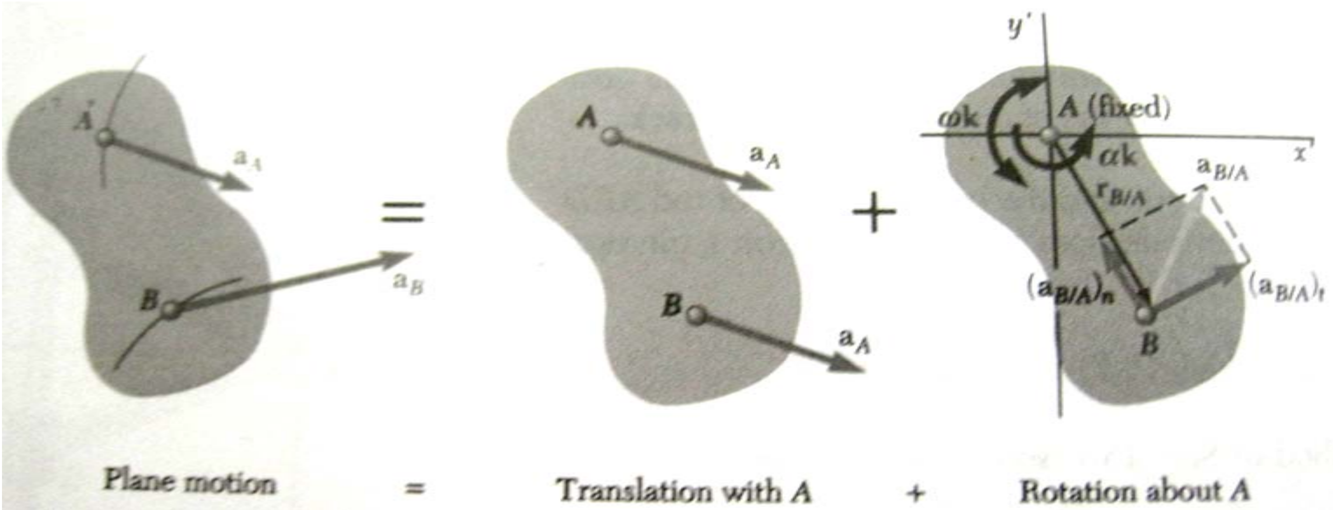
$$\Rightarrow a_B=-\frac{(0.3)^2(\frac{2}{\sqrt{3}})^3}{0.2}=-0.693\frac{m}{s^2}$$

$$\dot y=b\dot\theta\cos\theta \quad , \quad \omega=\dot\theta=\frac{v_A}{b}\sec\theta \quad \Rightarrow \quad \omega=\frac{0.3}{0.2}\frac{2}{\sqrt{3}}=1.732\frac{rad}{s}$$

$$\alpha=\dot\omega=\frac{v_A}{b}\dot\theta\sec\theta\tan\theta=\frac{v_A^2}{b^2}\sec^2\theta\tan\theta=\frac{(0.3)^2}{(0.2)^2}(\frac{2}{\sqrt{3}})^2\frac{1}{\sqrt{3}}=1.732\frac{rad}{s^2}$$

Relative Acceleration in Plane Motion

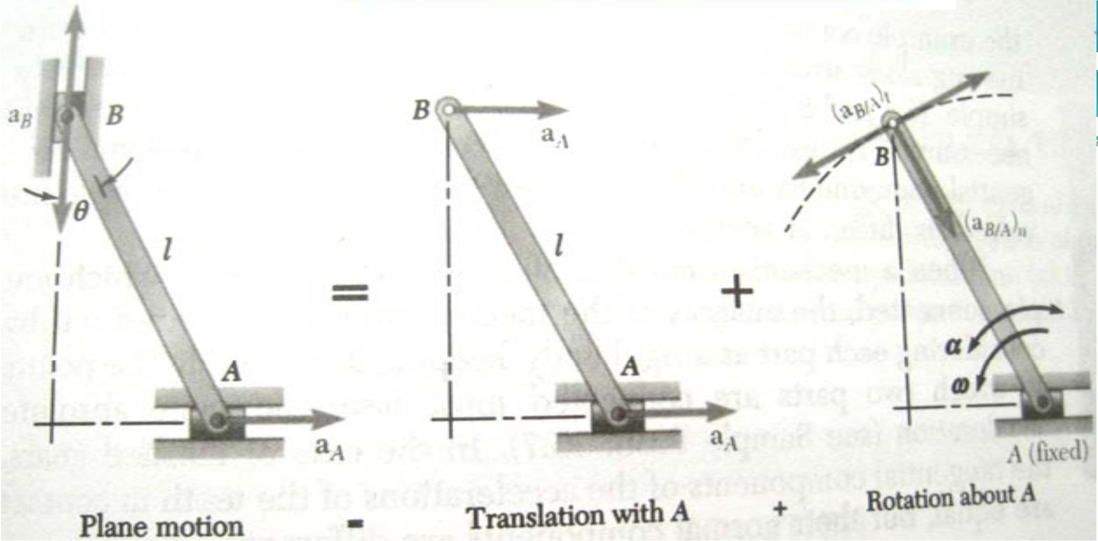
شتاب نسبی در حرکت صفحه ای (روابط برداری)



$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A}$$

$$(\vec{a}_{B/A}) = (\vec{a}_{B/A})_t + (\vec{a}_{B/A})_n = \alpha\hat{k} \times \vec{r}_{B/A} - \omega^2 r_{B/A}$$

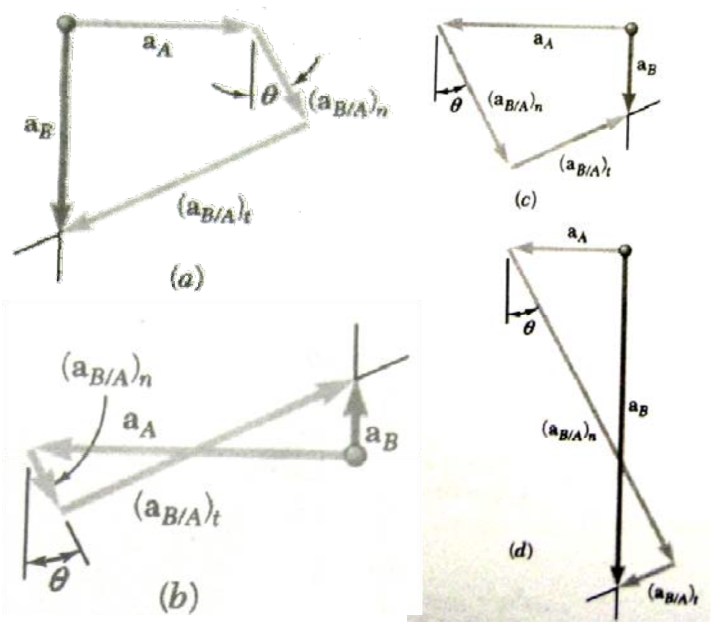
$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \alpha\hat{k} \times \vec{r}_{B/A} - \omega^2 r_{B/A}$$



مثال ۱

- میله ی AB را در نظر بگیرید که دو انتهای آن به ترتیب در مسیرهای افقی و عمودی می توانند حرکت کنند. با فرض دانستن سرعت و شتاب A ، شتابB و شتاب زاویه ای میله را بدست آورید:

پاسخ :



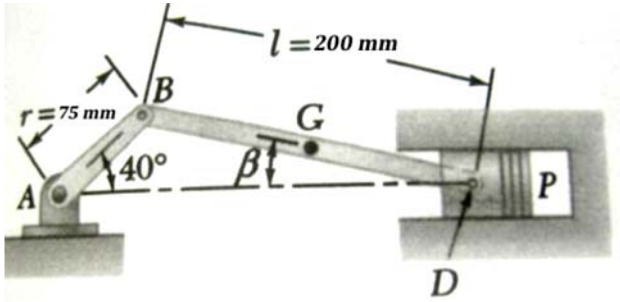
باید توجه داشت که قبل از حل مسئله تنها می توانیم راستای شتاب مطلق B و شتاب مماسی B نسبت به A را تعیین کنیم، بنابراین چهار حالت نشان داده شده در شکل می توانند رخ دهند، که در این جا به بیان روابط هندسی بین بردارها در حالت a اکتفا می کنیم.

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A}$$

$$\text{x Direction}: \ 0 = a_A + l\omega^2 \sin\theta - l\alpha\cos\theta$$

$$\text{y Direction}: \ -a_B = 0 - l\omega^2 \cos\theta - l\alpha\sin\theta$$

مثال ۲



- میلنگ AB با سرعت زاویه ای ثابت 2000rpm در جهت عقربه های ساعت می چرخد. برای وضعیت نشان داده شده، شتاب زاویه ای BD (α_{BD}) و شتاب حرکت پیستون (A_D) را بدست آورید.

پاسخ : چون سرعت زاویه ای AB ثابت و برابر $\omega_{AB} = 2000rpm = 209.4\frac{rad}{s}$ است , داریم : $\alpha_{AB} = 0$

$$\vec{v}_B = 75\cos 40\hat{i} + 75\sin 40\hat{j} = 57.45\hat{i} + 48.21\hat{j}$$

$$\vec{r}_{D/B} = 200\cos 14\hat{i} - 200\sin 14\hat{j} = 194.1\hat{i} - 48.21\hat{j}$$

$$\vec{a}_D = \vec{a}_B + \vec{a}_{D/B} \qquad \vec{a}_B = \cancelto{0}{\alpha_{AB}}\hat{k}\times\vec{r}_B - \omega_{AB}{}^2\vec{r}_B = -(2\times 7.4)^2\vec{r}_B = -2519.32\hat{i} - 2113.93\hat{j}$$

$$\vec{a}_{D/B} = \alpha_{BC}\hat{k}\times\vec{r}_{D/B} - (\omega_{BD}{}^2)\vec{r}_{D/B} = (48.21\alpha_{BD}\hat{i} + 194.1\alpha_{BD}\hat{j} - 62\vec{r}_{D/B})\times 10^{-3}$$

$$\vec{a}_D = (-3265.3 + 0.04821\alpha_{BD})\hat{i} + (-1928.61 + 0.1941\alpha_{BD})\hat{j}$$

چون ذکر شده که حرکتِ در راستای قائم محدود شده است پس : $(a_D)_y = 0$

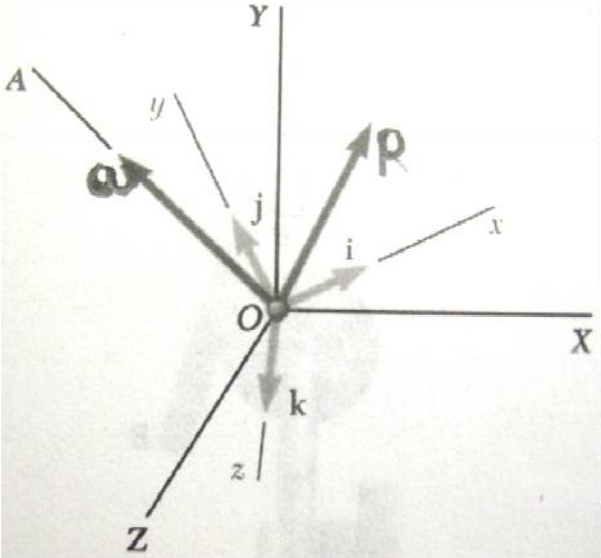
$$-1928.61 + 0.1941\alpha_{BD} = 0 \Rightarrow \alpha_{BD} = 9936\frac{rad}{s^2}$$

$$a_D = -3265.3 + 0.048(9936) = -2786\frac{m}{s^2}$$

آهنگ تغییرات یک بردار نسبت به یک مرجع دوار

Rate of Change of a Vector with Respect to a Rotating Frame

- اگر بردار مکان r را در دو مرجع لخت O_{XYZ} و مرجع دوار O_{xyz} که با سرعت زاویه ای ω می چرخد در نظر بگیریم، داریم:



$$\vec{r} = r_x\hat{i} + r_y\hat{j} + r_z\hat{k}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{r})_{O_{xyz}} = \dot{r}_x\hat{i} + \dot{r}_y\hat{j} + \dot{r}_z\hat{k}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{r})_{O_{XYZ}} = \underbrace{\dot{r}_x\hat{i} + \dot{r}_y\hat{j} + \dot{r}_z\hat{k}}_{\frac{d}{dt}(\vec{r})_{O_{xyz}}} + \underbrace{r_x\dot{\hat{i}} + r_y\dot{\hat{j}} + r_z\dot{\hat{k}}}_{\vec{\omega}\times\vec{r}}$$

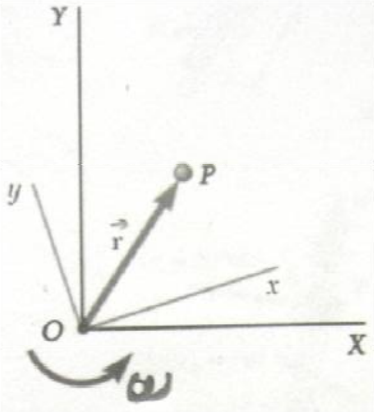
- و به طور کلی به عنوان یک قضیه ی ریاضی برای هر متغیر برداری مثل P داریم:

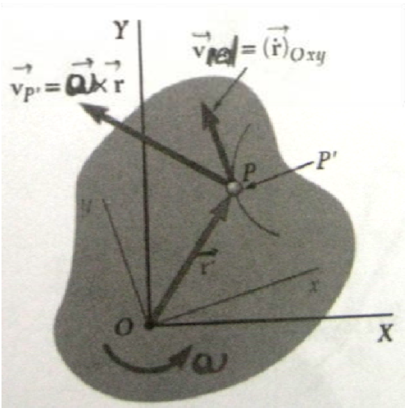
$$\frac{d}{dt}(\vec{P}_{\text{مطلق}}) = \frac{d}{dt}(\vec{P}_{\text{محلي}}) + \vec{\omega}\times\vec{P}$$

- توجه شود که در قضیه ی فوق هر نوع بردار فیزیکی(بردار مکان، بردار سرعت، بردار شتاب، بردار سرعت زاویه ای و...) می تواند جایگزین بردار P شود.

Plane Motion of a Particle Relative to a Rotating Frame. CORIOLIS Acceleration

حرکت صفحه ای یک ذره(از جسم صلب) نسبت به مرجع دوار. شتاب کوریولیس





$$\vec{v}_P = \frac{d}{dt}(\vec{r})_{O_{XY}} = \frac{d}{dt}(\vec{r})_{O_{xy}} + \vec{\omega}\times\vec{r}$$

$$\boxed{\vec{v}_P = \vec{v}_{rel} + \vec{\omega}\times\vec{r}}$$

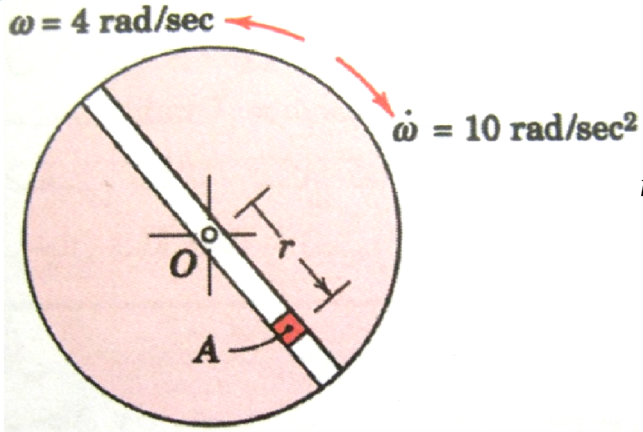
$$\vec{a}_P = \frac{d}{dt}(\vec{v}_P) = \frac{d}{dt}(\dot{\vec{r}}_{O_{xy}}) + \frac{d}{dt}(\vec{\omega}\times\vec{r}) = \ddot{\vec{r}}_{O_{xy}} + \vec{\omega}\times\dot{\vec{r}}_{O_{xy}} + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r} + \omega\times[\dot{\vec{r}}_{O_{xy}} + \vec{\omega}\times\vec{r}]$$

$$\boxed{\vec{a}_P = \underbrace{\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}}_{\vec{\alpha}\times\vec{r}} + \underbrace{\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})}_{-\omega^2\vec{r}} + \underbrace{2\vec{\omega}\times\vec{v}_{rel}}_{a_C} + \vec{a}_{rel}}$$

تذکر :

- منظور از v_{rel} و a_{rel} در روابط فوق سرعت و شتاب P در مرجع دوار می باشد.
- حل مسائل مربوط به شتاب اعضایی که توسط پین و شیار یا ریل به هم متصل بوده و هر دو دوران می کنند، بدون در نظر گرفتن شتاب کوریولیس امکان پذیر نیست.

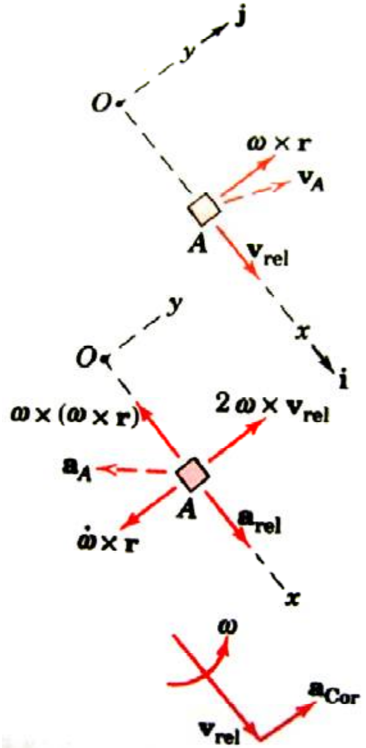
مثال ۱



- در لحظه ای که $r = 6cm \ , \ \dot{r}=5\dfrac{cm}{s} \ , \ \ddot{r}=81\dfrac{cm}{s^2} \ , \ \dot{\omega}=10\dfrac{rad}{s^2} \ , \ \omega=4\dfrac{rad}{s}$

سرعت و شتاب مطلق A رابدست آورید :

پاسخ :

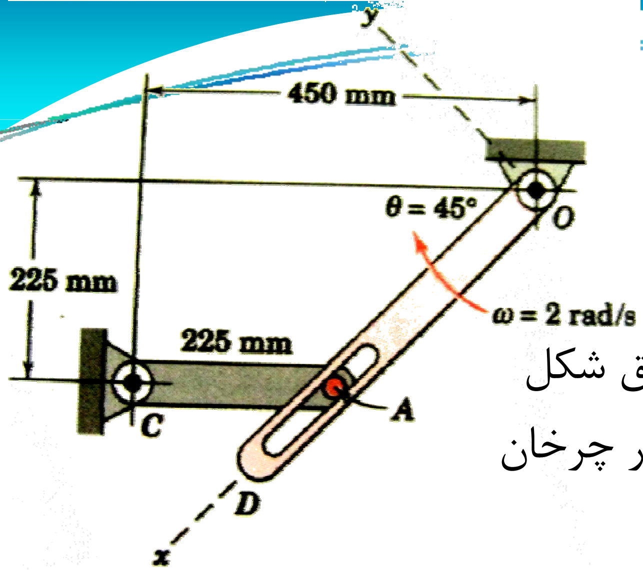


$$\vec{v}_P = \vec{\omega} r + \vec{v}_{rel} = 4\hat{k} \times 6\hat{i} + 5\hat{i} = 24\hat{j} + 5\hat{i} \Rightarrow |v_P| = 24.5\frac{cm}{s}$$

$$\vec{a}_P = -\omega^2 \vec{r} + \vec{\alpha} \times \vec{r} + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{rel} + \vec{a}_{rel} = \underbrace{-16 \times 6\hat{i}}_{-96\hat{i}} - \underbrace{10\hat{k} \times 6\hat{i}}_{-60\hat{j}} + \underbrace{2(4\hat{k} \times 5\hat{i})}_{40\hat{j}} + 81\hat{i} = -15i - 20j$$

$$\Rightarrow |a_P| = 25\frac{cm}{s^2}$$

مثال ۲



- پین A میله ی لولایی AC به حرکت در شیار چرخان میله ی OD مقید است . سرعت زاویه ای OD برابر است با $\omega = 2\dfrac{rad}{s}$ ساعتگرد و در فاصله ای از حرکت که با آن سروکار داریم ثابت است . در وضعیتی مطابق شکل که $\theta = 45^o$ و AC افقی است , سرعت پین A و سرعت A نسبت به شیار چرخان میله ی OD را تعیین کنید.

پاسخ :

برای OD :

$$\vec{v}_A = \vec{\omega} r + \vec{v}_{rel} = 2\hat{k} \times 225\sqrt{2}\hat{i} + \vec{v}_{rel}\hat{i} = 450\sqrt{2}\,\hat{j} + \vec{v}_{rel}\hat{i}$$

برای عضو AC با همان x'' و y'' که منطبق بر x' و y' است.

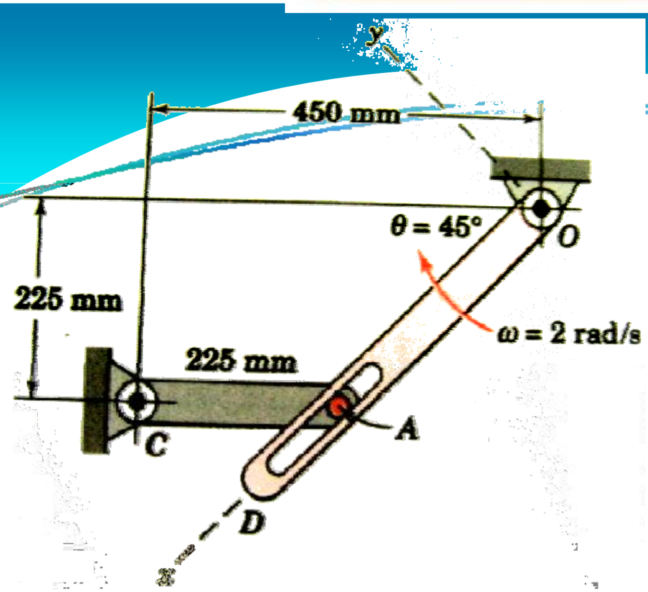
$$\vec{v}_A = \vec{\omega}_{CA} r_{CA} + \cancelto{0}{\vec{v}_{rel}} = -\omega_{CA}\hat{k} \times \left(\frac{225\sqrt{2}}{2}(-\hat{i} - \hat{j})\right) \Rightarrow \vec{v}_A = \frac{225\sqrt{2}}{2}\omega_{AC}(-\hat{i} + \hat{j})$$

A ثابت نسبت به AC

حال مولفه های $\vec{v}_A$ را با هم برابر قرار می دهیم :

$$\Rightarrow \begin{cases} v_{rel} = -\dfrac{225\sqrt{2}}{2}\omega_{AC} \\ 450\sqrt{2} = \dfrac{225\sqrt{2}}{2}\omega_{AC} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_{AC} = 4\dfrac{rad}{s} \\ v_{rel} = -450\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\vec{v}_A = -450\sqrt{2}\hat{i} + 450\sqrt{2}\,\hat{j} \qquad |\vec{v}_A| = 900\frac{m}{s} \uparrow$$



مثال ۳

در مسئله ی اسلاید قبلی شتاب مطلق A و شتاب نسبی پین A نسبت به میله ی OD را بدست آورید :

پاسخ :

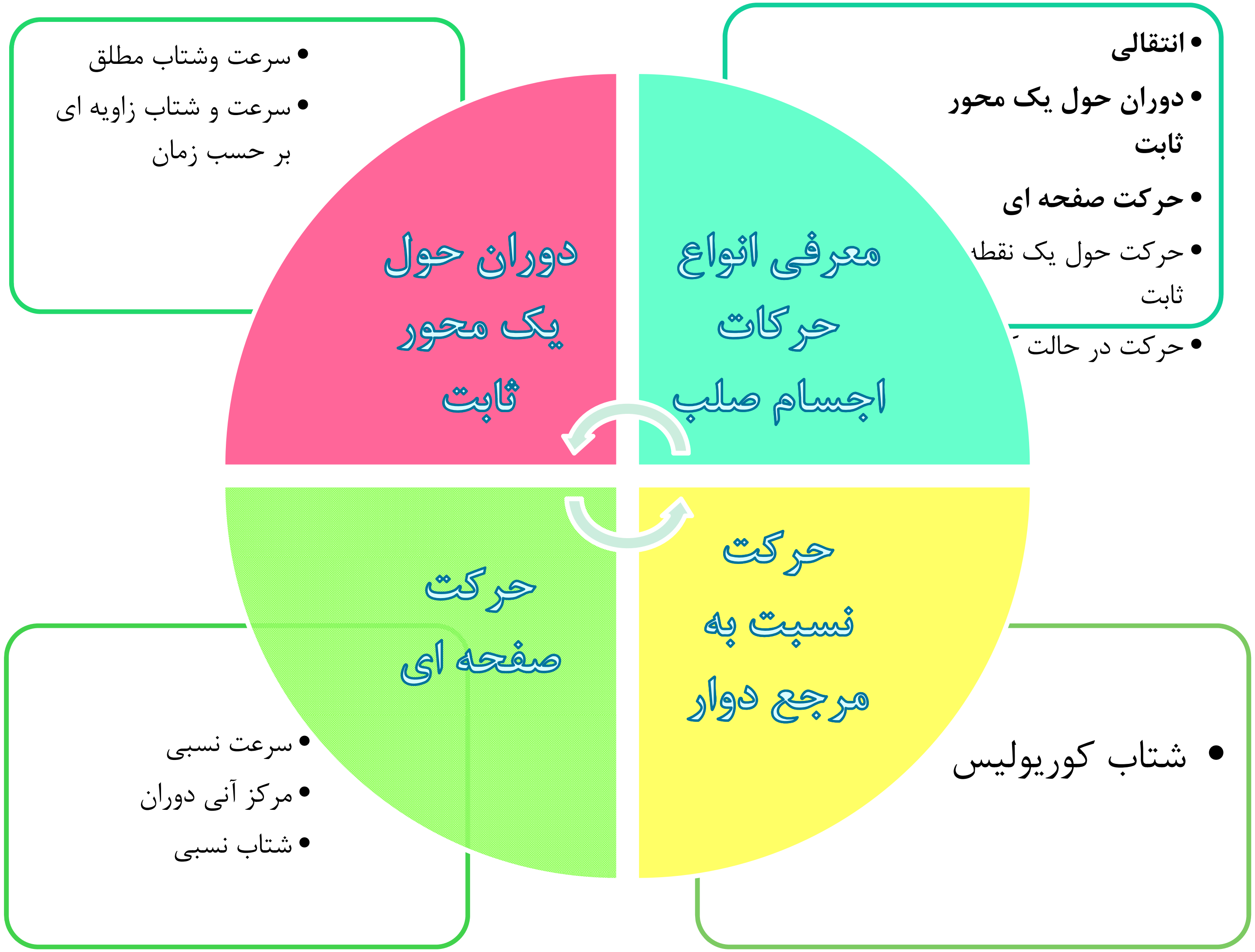
عضو OD :
$$\vec{a}_A = \cancelto{0}{\vec{\alpha}_{OD}} \times \vec{r} - \omega_{OD}^{2} \times \vec{r} + 2\vec{\omega}_{OD} \times \vec{v}_{rel} + \vec{a}_{rel}\hat{i} = -4 \times 225\sqrt{2}\hat{i} + 2(-2\hat{k} \times -450\sqrt{2}\hat{i}) + a_{rel}\hat{i}$$
$$= (a_{rel} - 900\sqrt{2})\hat{i} - 1800\sqrt{2}\,\hat{j}$$

عضو AC :
$$\vec{a}_A = \vec{\alpha}_{AC} \times \vec{r}_{CA} - \omega^2 \times \vec{r}_{CA} + 2\vec{\omega}_{AC} \times \vec{v}_{rel} + \vec{a}_{rel}\hat{i} = (-\dot{\omega}_{AC}\hat{k}) \times \left(-\frac{225\sqrt{2}}{2}(\hat{i} + \hat{j})\right) - 16\left(-\frac{225\sqrt{2}}{2}\hat{i} - \frac{225\sqrt{2}}{2}\hat{j}\right)$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}(225\dot{\omega}_{AC} + 3600)\hat{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}(-225\dot{\omega}_{AC} + 3600\,\hat{j})$$

$$\begin{cases} a_{rel} - 900\sqrt{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(225\dot{\omega}_{AC} + 3600) \\ -1800\sqrt{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\dot{\omega}_{AC} + 3600) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\omega}_{AC} = 32\dfrac{rad}{s^2} \\ a_{rel} = 89\dfrac{m}{s^2} \end{cases} \Rightarrow \vec{a}_A = 7637\hat{i} - 2546\,\hat{j}\,\frac{m}{s^2} \qquad |\vec{a}_A| = 8050\frac{m}{s^2} \quad 63.4^{\circ}$$

Chapter Review

مرور فصل



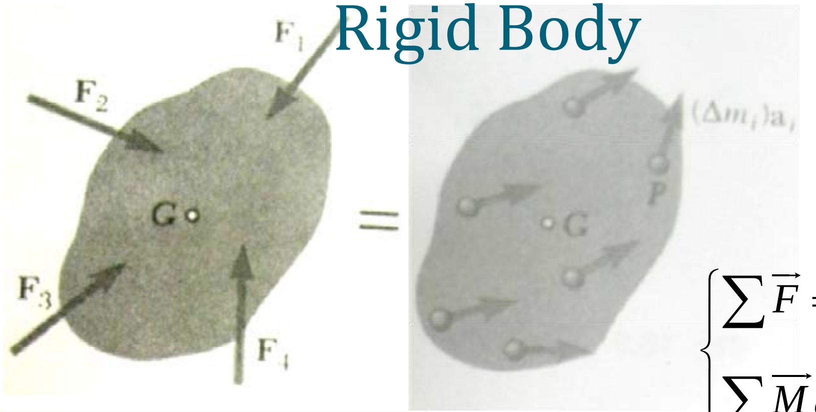
Plane Kinetics of Rigid Bodies
سینتیک صفحه ای اجسام صلب

فصل ۶

- نیرو- شتاب
  - معادلات حاکم بر حرکت اجسام صلب
    - معادلات حرکت صفحه ای
    - معادلات ممان دیگر
  - روش حل مسائل شامل حرکت جسم صلب
    - حرکت انتقالی
    - دوران حول مرکز جرم
    - حرکت صفحه ای در حالت کلی
  - حرکات مقید
    - چرخش حول محوری خارج از مرکز جرم
    - حرکت غلطشی
- روش های انرژی
  - اصل کار و انرژی
  - کار نیروها و زوج نیرو ها
  - انرژی جنبشی اجسام صلب
    - چرخش حول محور خارج از مرکز جرم
  - بقای انرژی
  - توان
- تکانه و اندازه حرکت
  - اصل تکانه و اندازه حرکت
    - اندازه حرکت خطی
    - اندازه حرکت زاویه ای
    - دوران حول محور خارج از مرکز جرم
- برخورد
  - برخورد غیر مرکزی

Equations of Motion for a Rigid Body

معادلات حرکت برای یک جسم صلب



به طور کلی دو معادله ی برداری زیر موجود است:

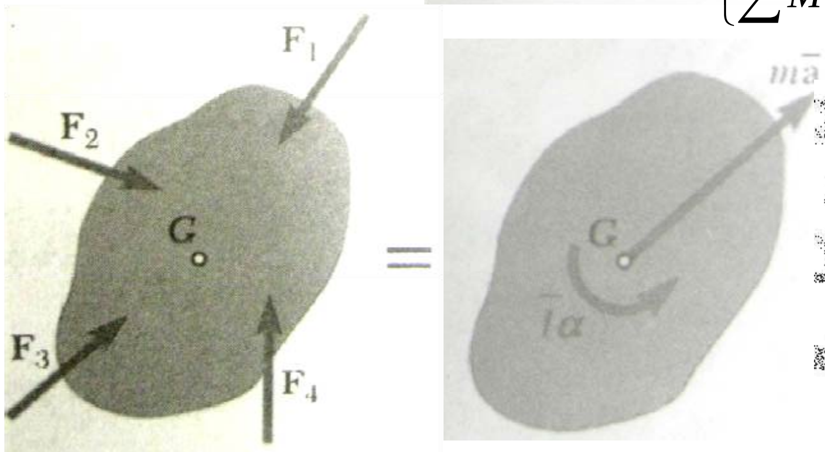
$$\begin{cases} \sum \vec{F} = m\vec{a} \\ \sum \vec{M}_G = \dot{\vec{H}}_G \end{cases}$$

اندازه حرکت زاویه ای برای جسم صلب:

$$\vec{H}_G = \sum (\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i)$$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\vec{H}_G = \sum \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)\, m_i = \sum m_i r_i^2 \vec{\omega} = \bar{I}\vec{\omega}$$



بنابراین برای حرکت صفحه ای جسم صلب داریم:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \begin{cases} \sum \vec{F}_x = m\vec{a}_x \\ \sum \vec{F}_y = m\vec{a}_y \end{cases}$$

برآیند نیروها در دو راستای افقی و قائم

$$\sum \vec{M}_G = \bar{I}\vec{\alpha} \Rightarrow M_G = \bar{I}\alpha$$

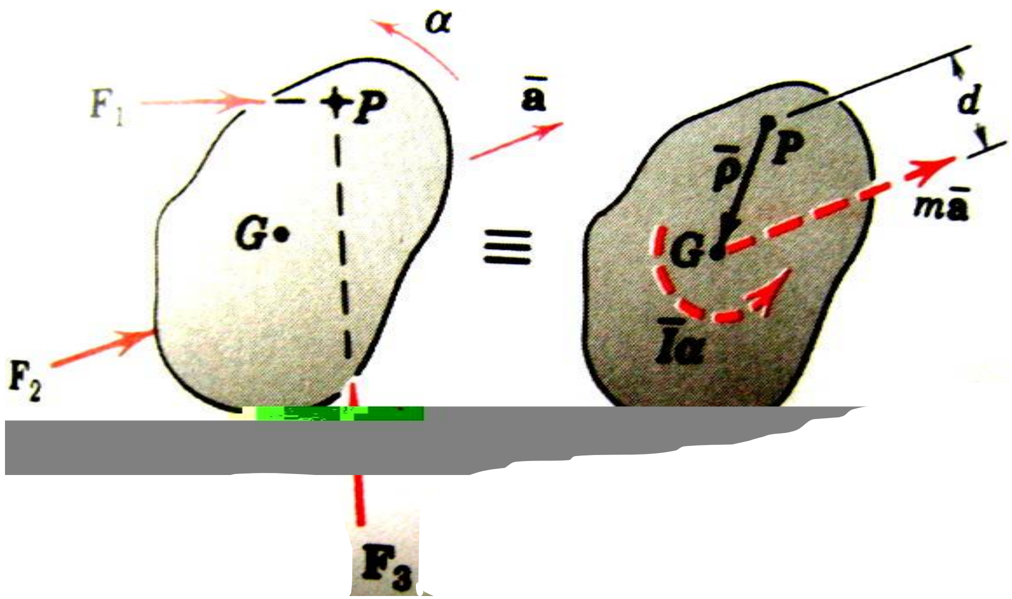
برآیند لنگر نسبت به محور عمود بر سطح

Alternative Moment Equations

معادلات دیگر ممان

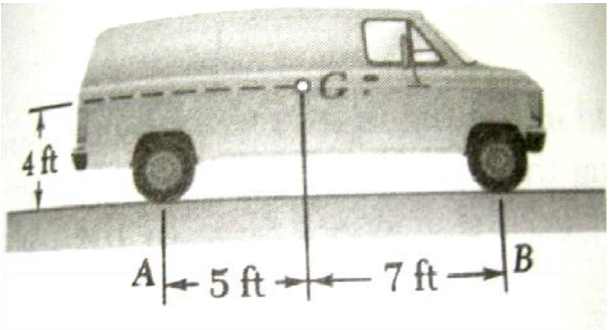
- اگر بخواهیم معادله ی ممان را حول نقطه ی دیگری به جز مرکز جرم بنویسیم، خواهیم داشت:

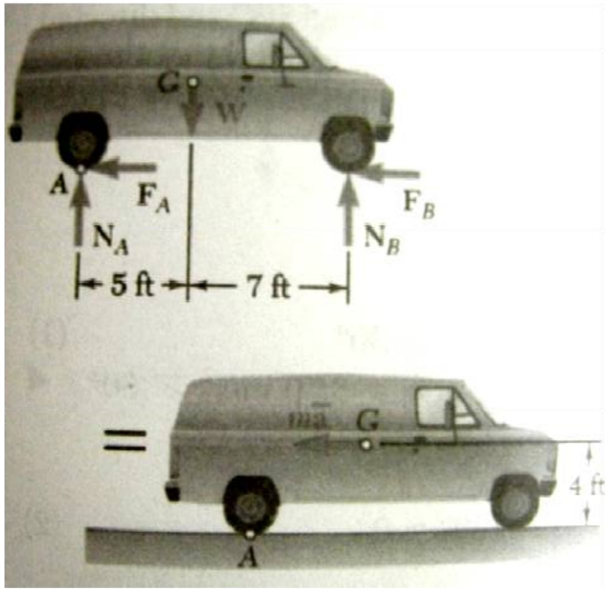
$$\begin{cases} \sum M_P = \dot{H}_G + \bar{r} \times m\bar{a} \\ \sum M_P = \bar{I}\alpha + m\bar{a}d \end{cases}$$



مثال

کامیونی به جرم m با سرعت 10m/s در حال حرکت است که ناگهان راننده ترمز میکند و در نتیجه ی آن چرخ ها قفل شده و روی زمین لیزی خورد پس از طی مسافت 7.5m می ایستد .





$$v^2 - v_0^2 = 2\bar{a}\Delta x \Rightarrow 0 - 10^2 = 2\bar{a}(7.5) \Rightarrow a = -6.67\frac{m}{s^2}$$

$$(\sum F_y)_{ext} = (\sum F_y)_{effective} \Rightarrow N_1 + N_2 - W = 0 \Rightarrow N_1 + N_2 = W$$

$$(\sum F_x)_{ext} = (\sum F_x)_{effective} \Rightarrow -F_1 - F_2 = -m\bar{a} \Rightarrow \mu_k N_1 + \mu_k N_2 = m\bar{a}$$

$$\mu_k (N_1 + N_2) = \mu_k W \Rightarrow m\bar{a} = \mu_k mg \Rightarrow \mu_k = \frac{\bar{a}}{g} = \frac{6.67}{9.81} = 0.68$$

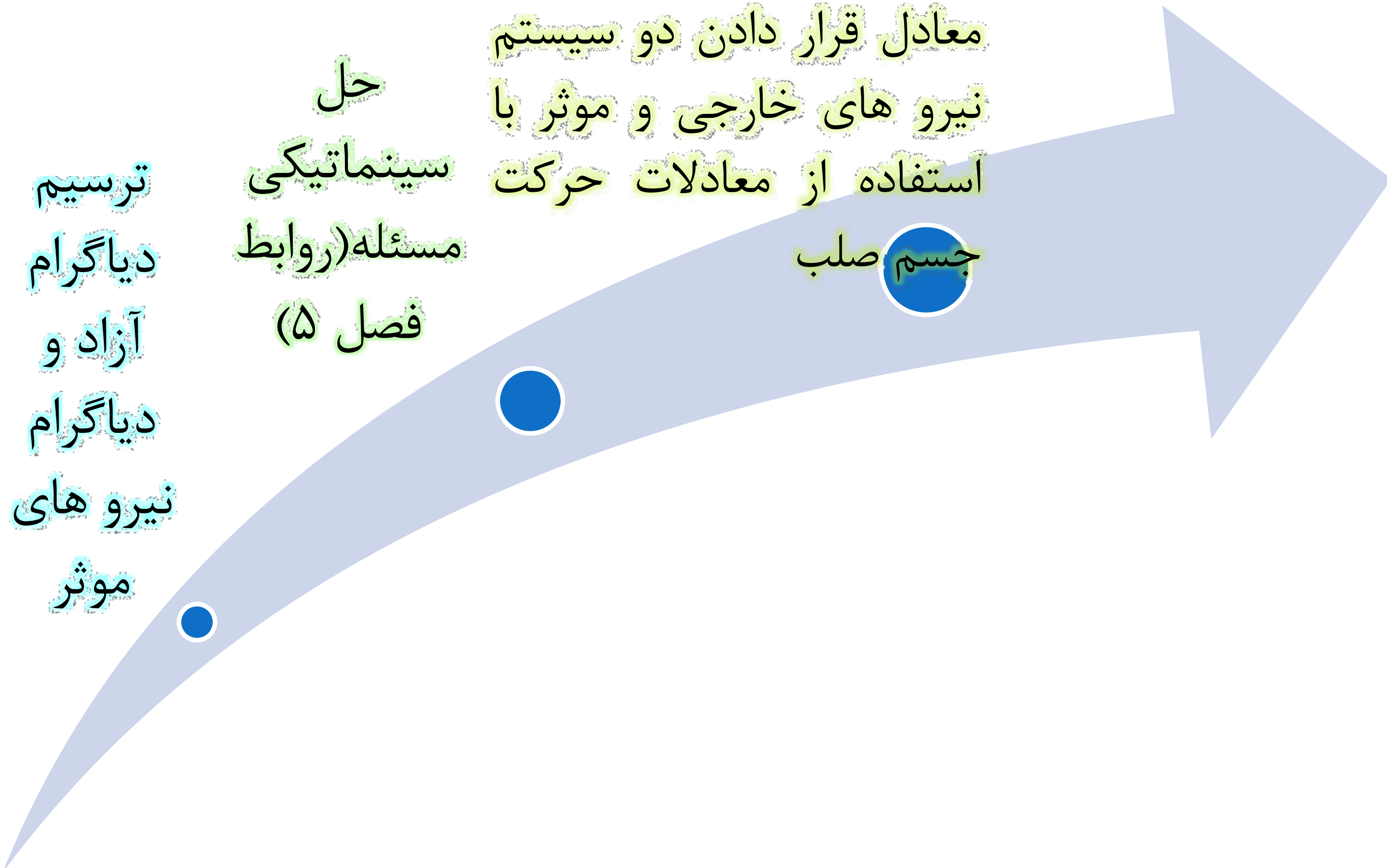
$$(\sum M_1)_{ext} = (\sum M_1)_{effective} \Rightarrow 4.6W - 4N_2 = -1.2m\bar{a} \Rightarrow \begin{cases} N_2 = 0.6W \\ N_1 = 0.4W \end{cases}$$

$$F_1 = \mu_k N_1 = 0.68 \times 0.4W = 0.27W$$

$$F_2 = \mu_k N_2 = 0.68 \times 0.6W = 0.41W$$

Solution of Problems Involving the Motion of a Rigid Body

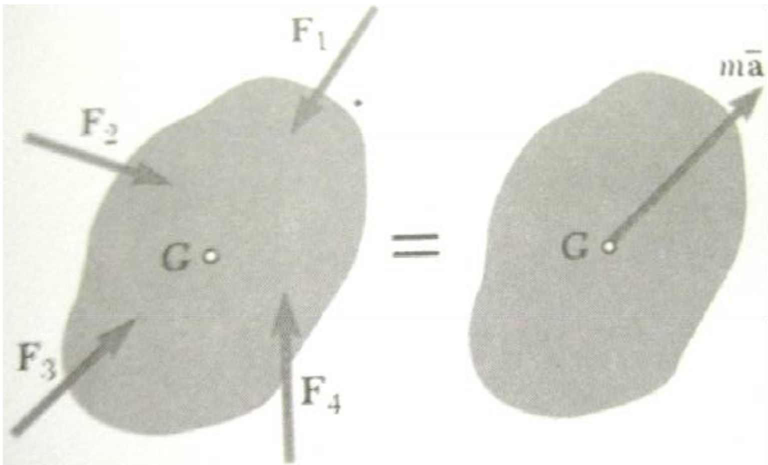
روش حل مسائل شامل حرکت جسم صلب



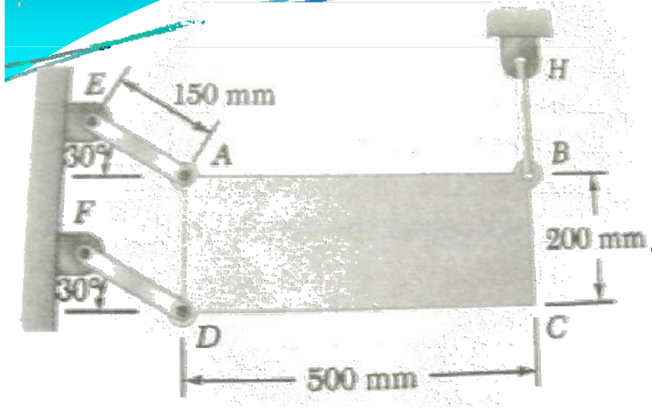
Translation حرکت انتقالی

- همان طور که در فصل ۵ معرفی شد، اگر در ضمن حرکت هر خط راستی درون جسم صلب، امتدادش را حفظ کند، به آن حرکت حرکت انتقالی گفته می شود.
- به عبارتی دیگر، در حرکت انتقالی همه ی ذرات جسم صلب در مسیر های موازی حرکت می کنند.
- از آنجایی که دورانی صورت نمی گیرد، سرعت و شتاب زاویه ای صفر خواهند بود.

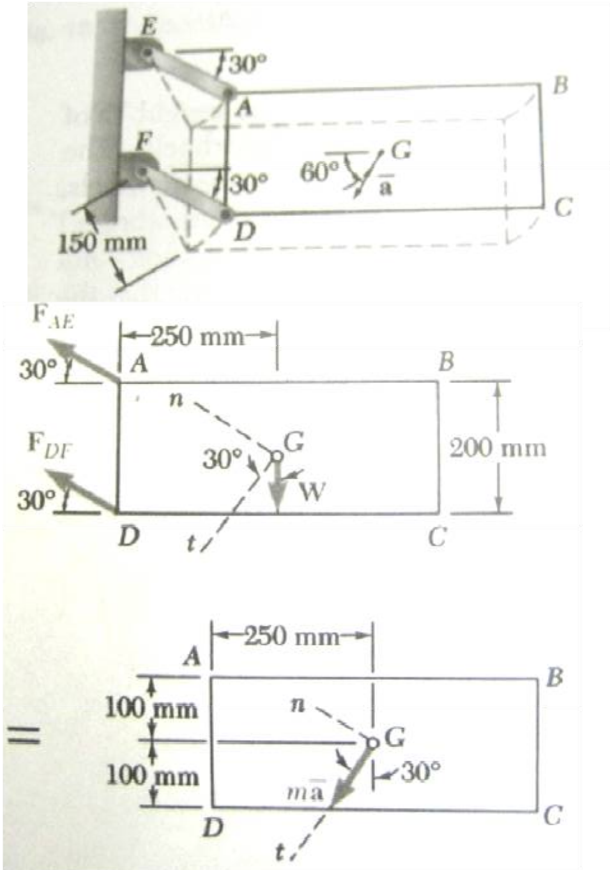
$$\begin{cases} \sum F = m\bar{a} \\ \sum M_G = \bar{I}\alpha = 0 \end{cases}$$



مثال



صفحه ی ABCD به جرم 8kg در وضعیت نشان داده شده قرار دارد که ناگهان کابل BH قطع می شود. بدست آورید شتاب صفحه بلافاصله پس از قطع کابل BH. :



$$(\sum F_t)_{ext} = (\sum F_t)_{effective}$$

$$mg\cos 30 = m\bar{a}_t$$

$$\bar{a}_t = g\cos 30 = 8.5\frac{m}{s^2}$$

$$(\sum F_n)_{ext} = (\sum F_n)_{effective} \Rightarrow F_{AE} + F_{DF} - W\sin 30 = 0$$

$$(\sum M_G)_{ext} = (\sum M_G)_{effective}$$

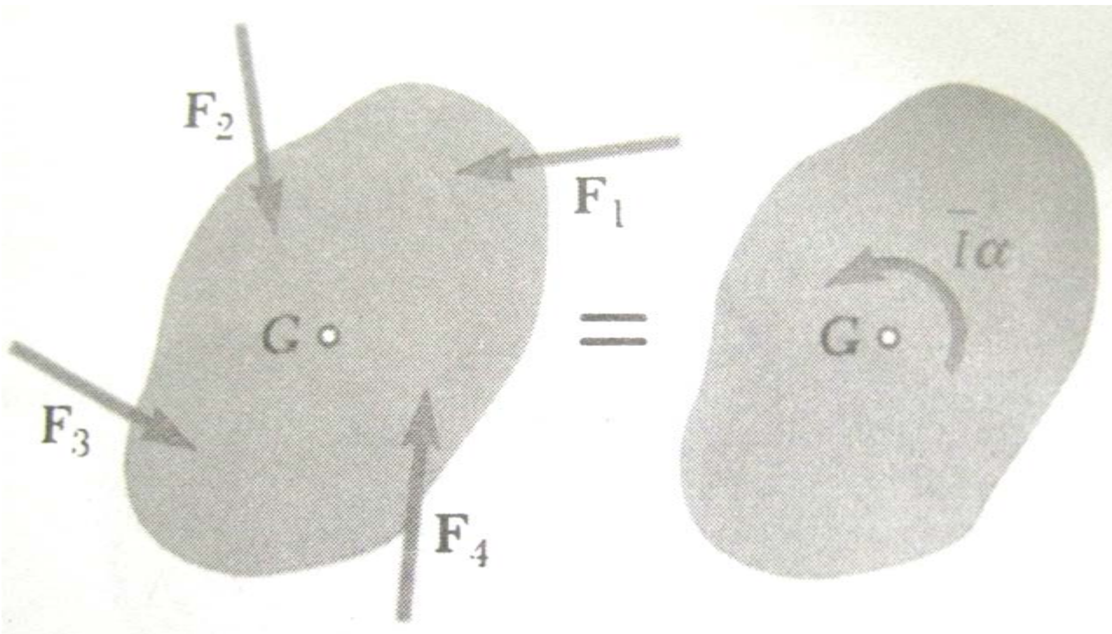
$$\Rightarrow (F_{AE} + F_{DF})\sin 30 \times 25 + (F_{DF} - F_{AE})\cos 30 \times 10 = 0$$

$$\begin{cases} F_{AE} = 0.611W = 47.9N \Rightarrow F_{AE} = 47.9N\ (T) \\ F_{DF} = -0.111W = -8.7W \Rightarrow F_{DF} = 8.7N\ (\mathrm{C}) \end{cases}$$

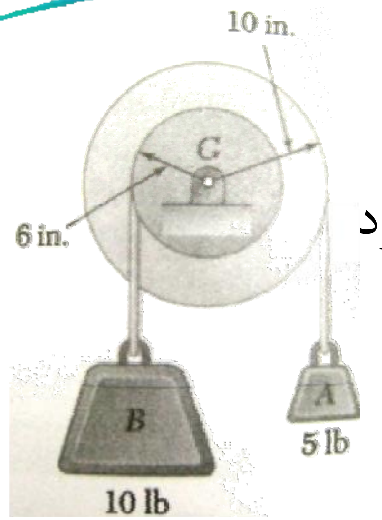
Centroidal Rotation دوران حول محور مرکز جرم

- اگر جسم صلب حول محور ثابتی که از مرکز جرم آن می گذرد، دوران کند، شتاب مرکز جرم صفر خواهد بود، بنابراین:

$$\begin{cases} \sum F = 0 \\ \sum M_G = \bar{I}\alpha \end{cases}$$



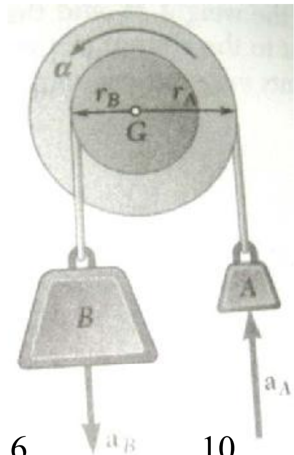
مثال



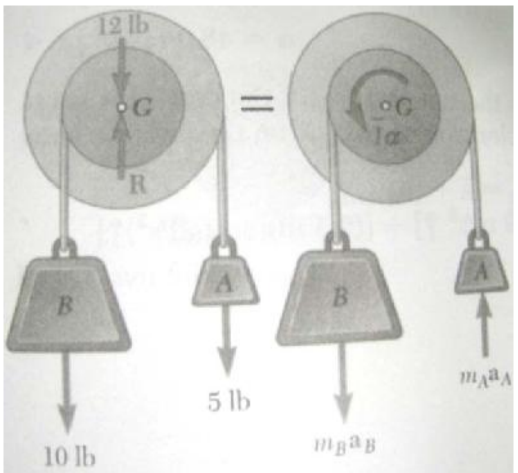
- قرقره ای به وزن 12lb و شعاع ژیراسیون 8in به دو وزنه مطابق شکل متصل شده است . با فرض اینکه اصکاک محوری وجود ندارد شتاب زاویه ای قرقره و شتاب هر یک از وزنه ها را تعیین کنید .

$$\sum M_G = 0 \Rightarrow W_B \times 6 - 5\times 10 = 0 \Rightarrow W_B = 8.33(lb)$$

$$a_A = r_A\alpha = (\frac{10}{12}\,ft)\alpha \uparrow \qquad , \qquad a_B = r_B\alpha = (\frac{6}{12}\,ft)\alpha \downarrow$$



$$\bar{I} = m\bar{k}^2 = \frac{W}{g}\bar{k}^2 = \frac{12lb}{32.2\,ft/s^2}(\frac{8}{12}\,ft)^2 = 0.1656 lb.ft.s^2$$



$$\sum M_G = \sum (M_G)_{eff} : \quad (10lb)(\frac{6}{12}\,ft) - (5lb)(\frac{10}{12}\,ft) = +\bar{I}\alpha + m_B a_B(\frac{6}{12}\,ft) + m_A a_A(\frac{10}{12}\,ft)$$

$$10\times\frac{6}{12} - 5\times\frac{10}{12} = 0.1656\alpha + \frac{10}{32.2}\times\frac{6}{12}\alpha\times\frac{6}{12} + \frac{5}{32.2}\times\frac{10}{12}\alpha\times\frac{10}{12}$$

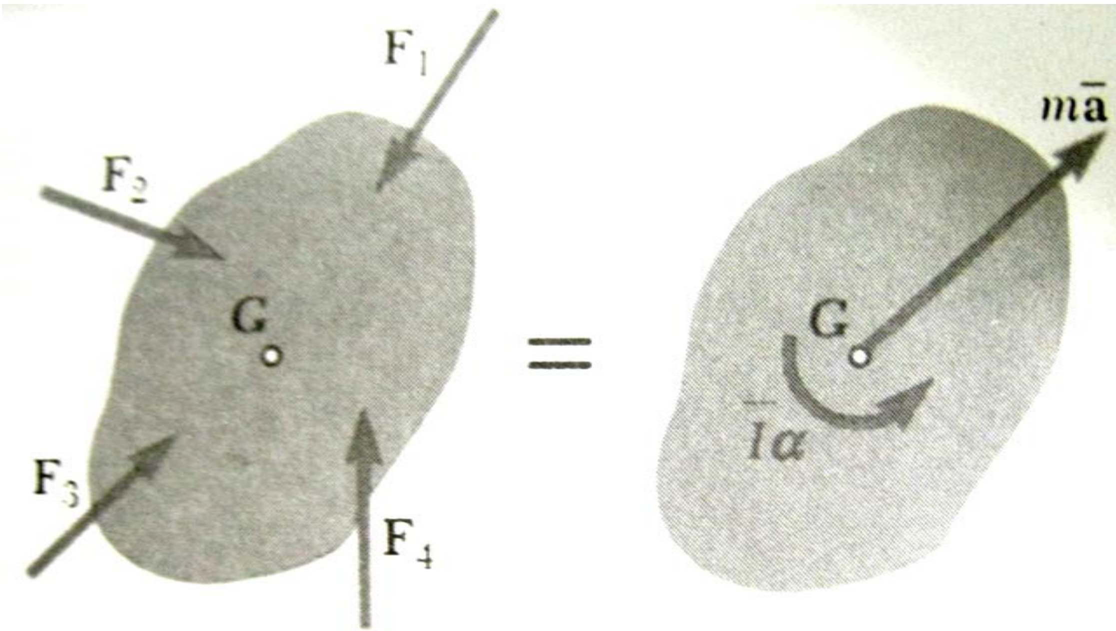
$$\alpha = +2.374 \quad (rad/s^2) \quad \text{(counterclockwise)}$$

$$a_A = r_A\alpha = \frac{10}{12}\times 2.374 = 1.978 \quad (\text{ft/s}^2)\uparrow$$

$$a_B = r_B\alpha = \frac{6}{12}\times 2.374 = 1.187 \quad (\text{ft/s}^2)\downarrow$$

حرکت صفحه ای در حالت کلی General Plane Motion

- در حالت کلی می توان هر حرکت صفحه ای را به صورت ترکیبی از حرکت انتقالی و دوران حول مرکز جرم در نظر گرفت.
- به منظور تشخیص نوع حرکت بین دو حالت کلی و دوران حول مرکز جرم، کافیست بررسی کنیم که آیا مرکز جرم جسم صلب، در اثر اعمال نیرو های خارجی شتاب می گیرد یا خیر.



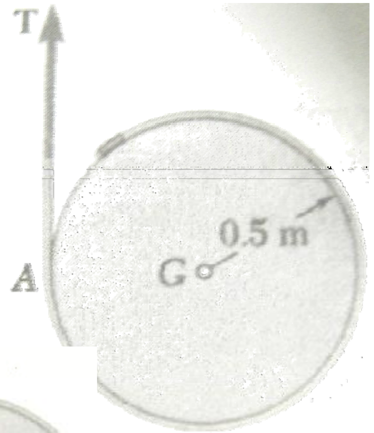
مثال

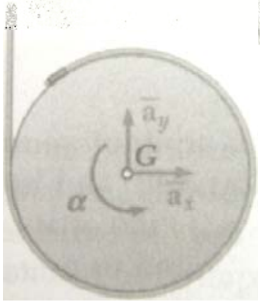
- کابلی دور یک صفحه ی همگن به شعاع 5m و جرم 15kg پیچیده شده است . اگر کابل به سمت بالا با نیروی T به اندازه ی 180N کشیده شود . تعیین کنید :

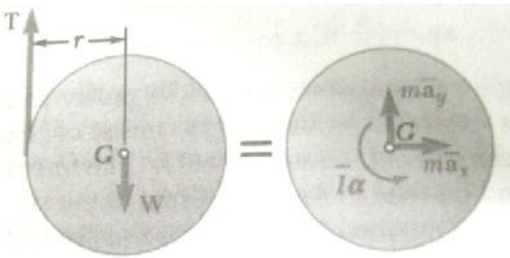
الف) شتاب مرکز دیسک

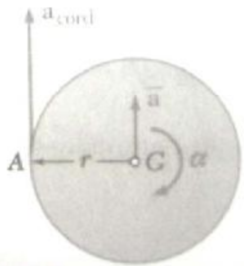
ب) شتاب زاویه ای صفحه

ج) شتاب کابل









$$\sum F_x = \sum (F_x)_{eff} \Rightarrow 0 = m\bar{a}_x \Rightarrow \bar{a}_x = 0$$

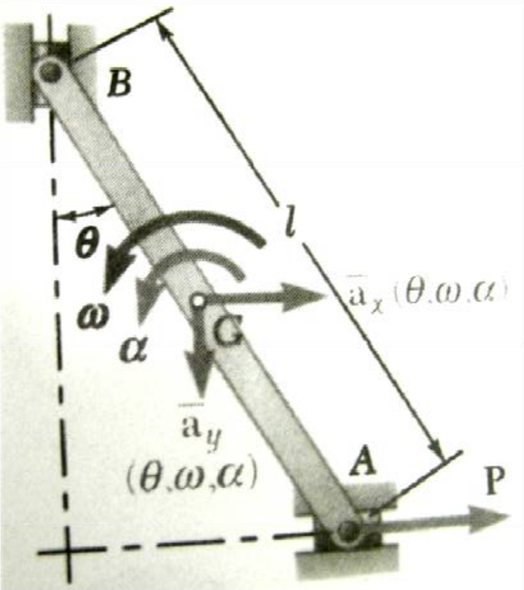
$$\sum F_y = \sum (F_y)_{eff} \Rightarrow T - W = m\bar{a}_y \Rightarrow \bar{a}_y = \frac{T-W}{m} = \frac{180 - 15\times 9.81}{15} = +2.19\frac{m}{s^2}\uparrow$$

$$\sum M_G = \sum (M_G)_{eff} \Rightarrow -Tr = \bar{I}\alpha \Rightarrow -Tr = \frac{1}{2}mr^2\alpha \Rightarrow \alpha = -\frac{2T}{mr} = -\frac{2(180)}{15(0.5)} = -48.0\frac{rad}{s^2}$$

$$a_{cord} = (a_A)_t = \bar{a} + (a_{A/G})_t = 2.19\uparrow + 0.5(48)\uparrow = 26.2\frac{m}{s^2}\uparrow$$

Constrained Plane Motion حرکت صفحه ای مقید

- در این نوع مسائل، پس از حل سینماتیکی با کمک روش هایی که در فصل ۵ در قالب شتاب نسبی معرفی شد، از معادلات سینتیکی استفاده می کنیم.
- به عنوان نمونه میله ی AB که دو انتهای آن به ترتیب مقید به حرکت در جهت افقی و قائم می باشند در نظر گرفته و شتاب مرکز جرم و شتاب زاویه ای آن را محاسبه می کنیم:



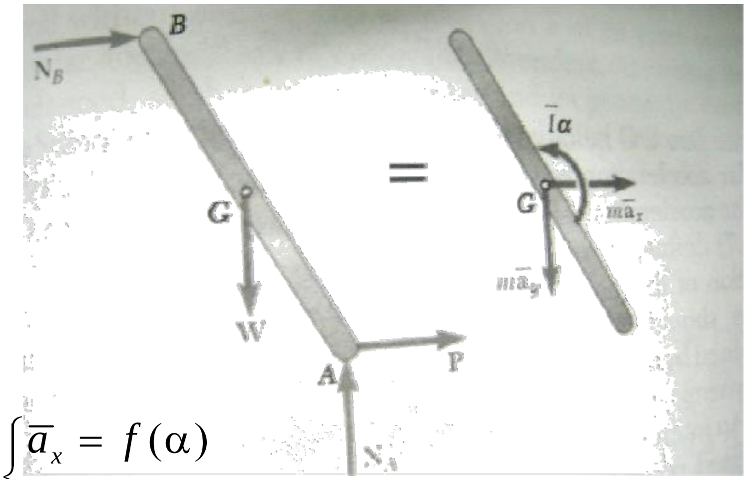
$$\overrightarrow{a_B} = \overrightarrow{a_A} + \overrightarrow{a_{B/A}}$$

$$a_A = l\alpha\cos\theta$$

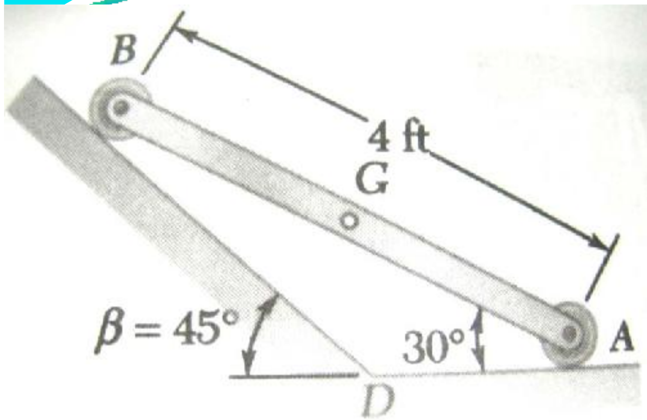
$$a_B = l\alpha\sin\theta$$

$$\overrightarrow{a_G} = \vec{\bar{a}} = \overrightarrow{a_A} + \underbrace{\frac{l}{2}\vec{\alpha}}_{a_{G/A}}$$

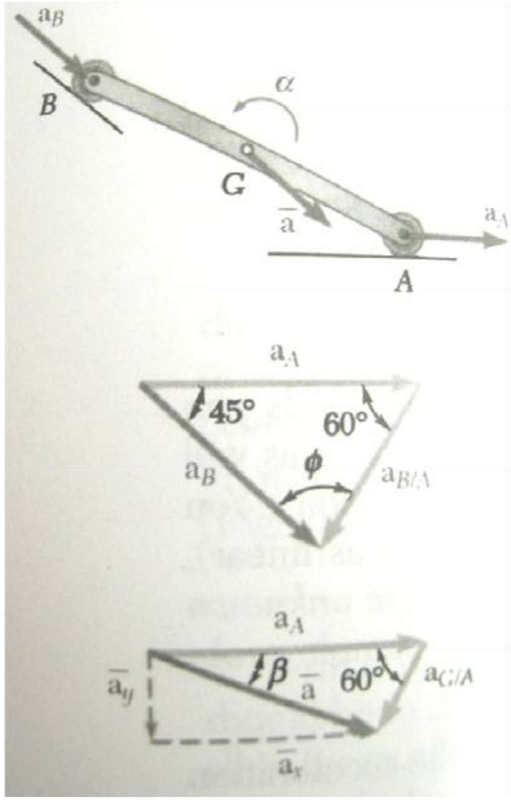
$$\begin{cases} \bar{a}\sin\beta = \dfrac{l}{2}\alpha\sin\theta \\ a_A = \bar{a}\cos\beta + \dfrac{l}{2}\alpha\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{a}_x = f(\alpha) \\ \bar{a}_y = g(\alpha) \end{cases}$$



مثال



دو انتهای یک میله ی 1.2m به وزن 10Kg به طور آزادانه می تواند حرکت کند(بدون اصطکاک) . حرکت از سکون آغاز می شود . تعیین کنید : الف) شتاب زاویه ای برای لحظه ی نشان داده شده . ب) عکس العمل ها در AوB



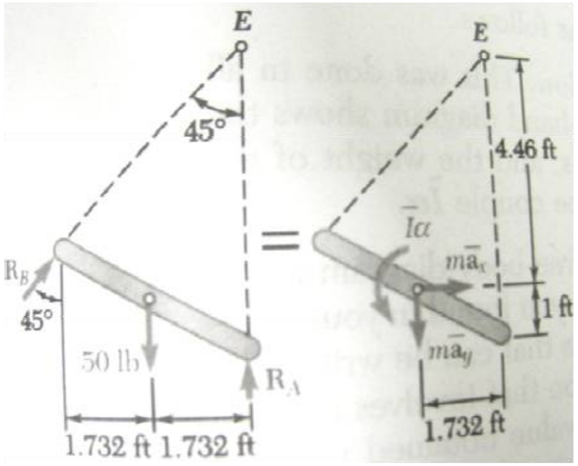
$$\frac{\sin 45}{1.2\alpha}=\frac{\sin 60}{a_A}=\frac{\sin 75}{a_B}\Rightarrow\begin{cases}a_A=1.64\alpha\\a_B=1.47\alpha\end{cases}$$

$$\overrightarrow{a_B}=\overrightarrow{a_A}+\overrightarrow{a_{B/A}}=\overrightarrow{a_A}+l\vec{\alpha}\quad,\quad\vec{\bar a}=\overrightarrow{a_A}+\overrightarrow{a_{G/A}}=\overrightarrow{a_A}+0.6\alpha$$

$$\bar a_x=1.64\alpha-0.6\alpha\cos 60\quad,\quad\bar a_y=1.34\alpha\hat i-0.52\alpha\hat j$$

$$\vec{\bar a}=1.34\alpha\hat i-0.52\alpha\hat j$$

$$\bar I=\frac{1}{12}ml^2=\frac{1}{12}(10)(1.2)^2=1.2kg.m^2\Rightarrow\bar I\alpha=1.2\alpha$$



$$(\sum M_G)_{ext}=(\sum M_G)_{effective}\Rightarrow 0.52W=1.2\alpha+(1.34\alpha)(1.34)+5.2\alpha(0.52)\Rightarrow\alpha=2.33\frac{Rad}{s^2}$$

$$(\sum F_x)_{ext}=(\sum F_x)_{effective}\Rightarrow N_B\cos 45=m\bar a_x=13.4(2.32)\Rightarrow N_B=44.1N$$

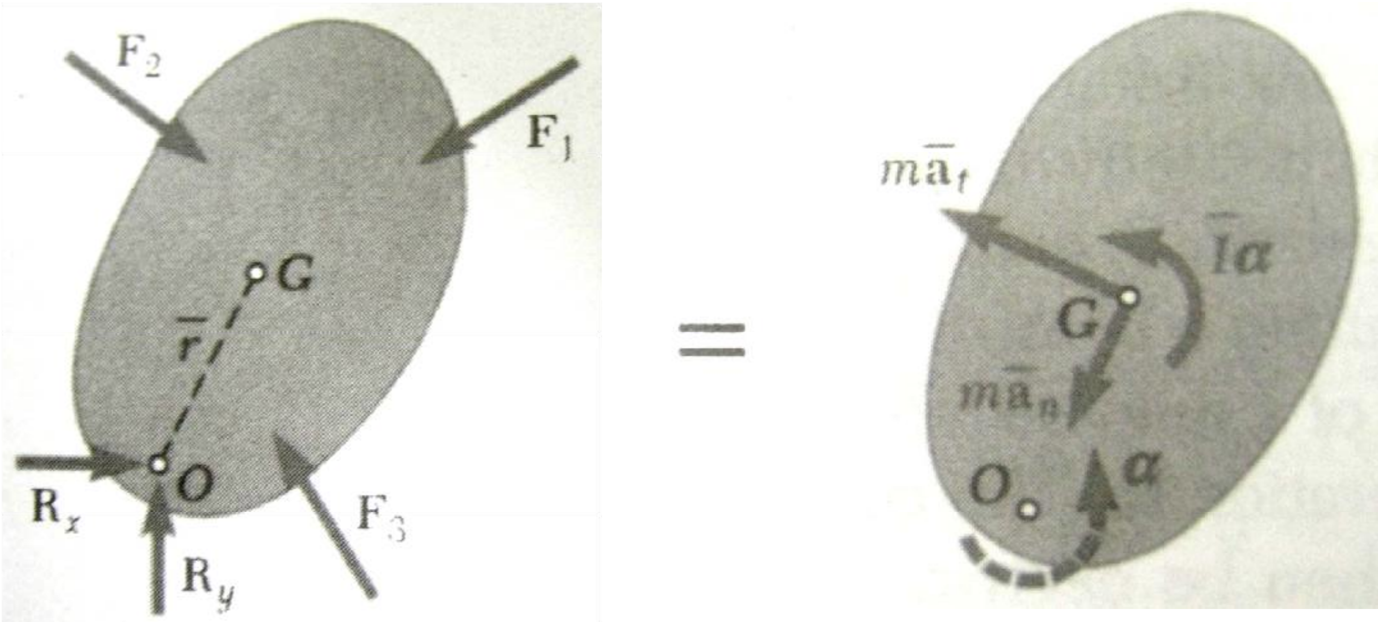
$$(\sum F_y)_{ext}=(\sum F_y)_{effective}\Rightarrow N_A-N+N_B\sin 45=-m\underbrace{\bar a_y}_{-0.52\times 2.33}\Rightarrow N_A=54.8N$$

Noncentroidal Rotation دوران حول محوری خارج از مرکز جرم

- در این نوع از حرکت مقید از معادله ی ممان حول محور دوران به شکل زیر استفاده می شود:

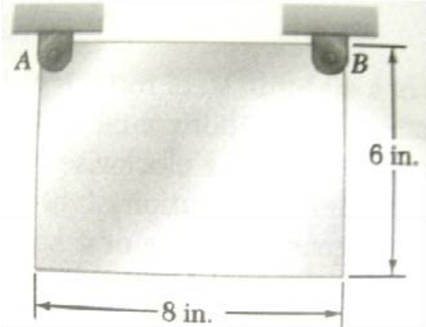
$$(\sum M_O)_{ext} = (\sum M_O)_{effective}$$

$$(\sum M_O)_{effective} = \bar{I}\alpha + m\overline{OG}^2\alpha = (\bar{I} + m\overline{OG}^2)\alpha = I_O\alpha$$



مثال

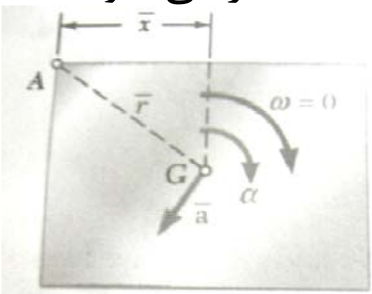
صفحه ی مستطیل شکلی به طول ۸ و عرض ۶ و جرم 20Kg از دو پین A,B معلق است . اگر پین B ناگهان از بین برود بدست آورید :



الف) شتاب زاویه ای صفحه

ب) مولفه های عکس العمل در پین A درست در لحظه ی بعد از بین رفتن پین B

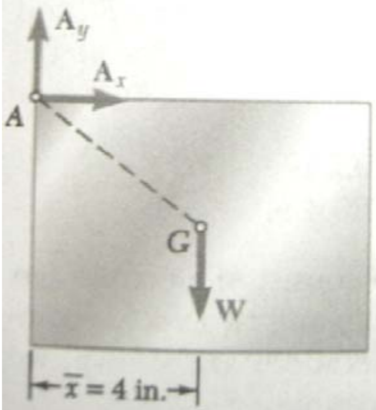
چون حرکت از سکون آغاز می شود در لحظه ی شروع حرکت $\omega = 0$ است . پس $a_n = \omega^2 r$ صفر می شود.



$$(\sum M_G)_{ext} = (\sum M_G)_{effective}$$

$$W\bar{x} = \bar{I}\alpha + m\underbrace{\bar{a}}_{\bar{r}\alpha}(\bar{r}) = \bar{I}\alpha + m\bar{r}^2\alpha = (\bar{I} + m\bar{r}^2) = I_A\alpha$$

$$\bar{I} = \frac{M}{12}(a^2+b^2) = \frac{20}{12}(0.2^2+0.15^2) = 0.1042kg.m^2 \Rightarrow \alpha = \frac{W\bar{x}}{I_A} = \frac{20(9.81)(0.1)}{0.1042+20(0.125)^2} = 47.08\frac{Rad}{s^2}$$



$$\bar{a} = r\alpha = (0.125)(47.08) = 5.89\frac{N}{s^2}$$

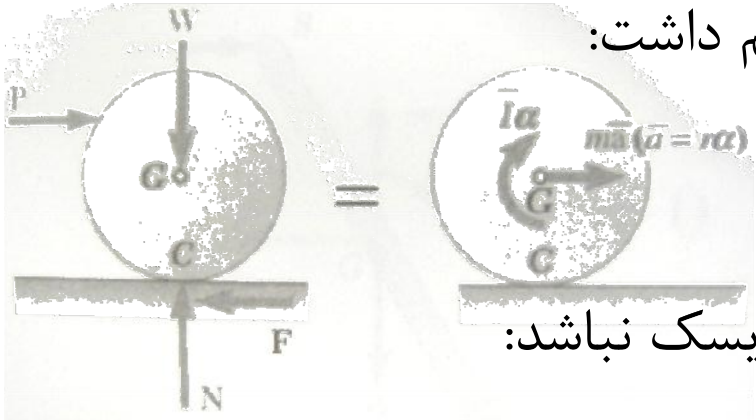
$$m\bar{a} = (20)(5.89) = 117.7N$$

$$(\sum F_x)_{ext} = (\sum F_x)_{effective} \Rightarrow A_x = -\frac{3}{5}(117.7) = -706N \leftarrow$$

$$(\sum F_y)_{ext} = (\sum F_y)_{effective} \Rightarrow A_y - W = -\frac{4}{5}(117.7) = 102.0N$$

Rolling Motion حرکت غلطشی

- ابتدا حرکت غلطشی بدون لغزش را برای یک دیسک همگن در نظر می گیریم: (منظور از همگن بودن منطبق بودن مرکز جرم با مرکز دیسک می باشد)
- اگر از رابطه ی مسافتی که مرکز دیسک طی یک دوران به اندازه ی θ می کند را در نظر بگیریم، با دوبار مشتق گیری خواهیم داشت:



$$x_O = r\theta \xrightarrow{\text{دو بار مشتق گیری}} a_O = r\alpha$$

- حال اگر مرکز جرم منطبق بر مرکز هندسی دیسک نباشد:
- جزوه ۸ رابطه ۲ (ب۱۰۵۴ ۱۶.۱۸)

$$\vec{a} = \vec{a}_O + \vec{a}_{G/O}$$

$$\vec{a} = \vec{a}_O + \underbrace{(\vec{a}_{G/O})_t}_{\overline{OG}\alpha} + \underbrace{(\vec{a}_{G/O})_n}_{\overline{OG}\omega^2}$$

Equation of Rolling & Sliding Motion روابط حرکت لغزشی و غلطشی

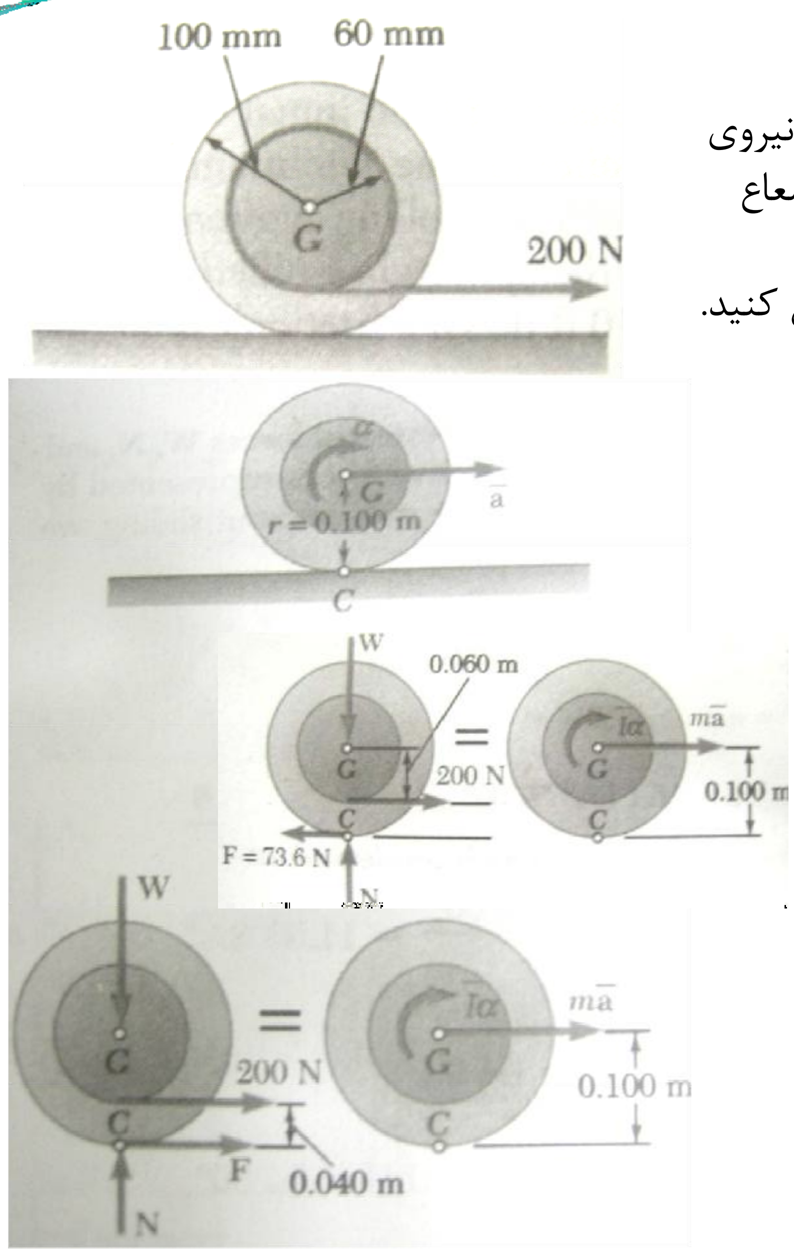
غلطش بدون لغزش	$F_f \leq \mu_s N$	$\bar{a} = r\alpha$
غلطش در آستانه ی لغزش	$F_f = \mu_s N$	$\bar{a} = r\alpha$
غلطش و لغزش	$F_f = \mu_k N$	$\bar{a} \neq r\alpha$ $\bar{a}, \alpha \rightarrow independent$

بحث درباره ی حرکت مطلق و نسبی نقطه ی تماس دیسک با زمین

سرعت نسبت به نقطه ی مجاور که بر روی زمین قرار دارد	• با توجه به این که لغزش نداریم، صفر است.
سرعت مطلق	• از آنجایی که سرعت زمین صفر می باشد و سرعت نقطه ی تماس نسبت به زمین نیز صفر است نتیجه می گیریم سرعت مطلق نیز باید صفر باشد.
سرعت نسبت به مرکز دیسک	• سرعت نسبی با انتخاب جهت مثبت به سمت جهت حرکت معادل $v_{rel} = -r\omega$ می باشد، توجه شود که مرکز هندسی دیسک **ساکن نیست**.
شتاب نسبت به نقطه ی مجاور که بر روی زمین قرار دارد	• در راستای موازی سطح برابر صفر می باشد. • در راستای قائم به سطح برابر $a_{rel} = mr\omega^2$ در جهت رو به مرکز جرم است.
شتاب مطلق	• با توجه به ساکن بودن زمین در هر دو راستای قائم و موازی: • در راستای موازی سطح برابر صفر می باشد.-در راستای قائم به سطح برابر $a_{rel} = mr\omega^2$ در جهت رو به مرکز جرم است.
شتاب نسبت به مرکز دیسک	• در راستای موازی سطح: $a_{rel} = r\alpha$ • در راستای قائم بر سطح $a_{rel} = mr\omega^2$

مثال

- طنابی دور غلتک داخلی چرخی پیچیده شده است و چرخ را با نیروی افقی 200N مطابق شکل می کشد. چرخ 50Kg جرم دارد و شعاع ژیراسیون آن 70mm است . با توجه به اینکه u(s)=0.20 و u(k)=0.15 شتاب نقطه ی G و شتاب زاویه ای چرخ را تعیین کنید.



$$\bar{a} = r\alpha = 0.1\alpha$$

$$\bar{I} = m\bar{k}^2 = (50)(0.07)^2 = 0.245$$

$$\sum M_C = \sum (M_C)_{eff} : 200\times 0.04 = m\bar{a}(0.1) + \bar{I}\alpha$$

$$8(N.m) = 50(kg)0.1(m)\alpha 0.1(m) + 0.245(kg.m^2)\alpha \Rightarrow \alpha = +10.74$$

$$\Rightarrow \bar{a} = r\alpha = 0.1\times 10.74 = 1.074$$

$$\sum F_x = \sum (F_x)_{eff} : F + 200 = m\bar{a} = 50\times 1.074 \Rightarrow F = -146.3(N) \leftarrow$$

$$\sum F_y = \sum (F_y)_{eff} : N - W = 0 \Rightarrow N = W = mg = 50\times 9.81 = 490.5(N) \uparrow$$

$$F_{\max} = \mu_s N = 0.2\times 490.5 = 98.1 \qquad (F > F_{\max})$$

$$F = F_k = \mu_k N = 0.15\times 490.5 = 73.6$$

$$\sum F_x = \sum (F_x)_{eff} : 200 - 73.6 = 50\bar{a} \Rightarrow \bar{a} = 2.53\frac{m}{s^2} \rightarrow$$

$$\sum M_G = \sum (M_G)_{eff} : 73.6\times 0.1 - 200\times 0.06 = 0.245\alpha \Rightarrow \alpha = -18.94\frac{rad}{s^2}$$

روش های انرژی برای حرکت صفحه ای اجسام صلب

Energy Methods for Plane Motion of Rigid Bodies

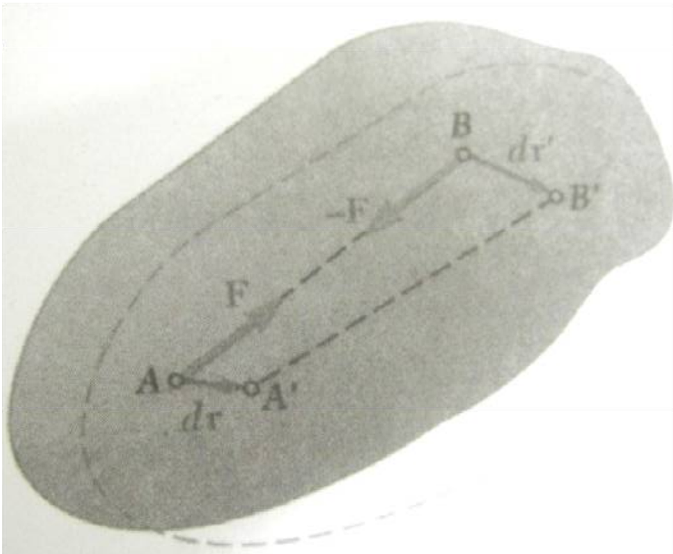
- اصل کار و انرژی
- انرژی جنبشی اجسام صلب
- بقای انرژی

Principle of Work and Energy

اصل کار و انرژی

انرژی جنبشی اولیه و ثانویه

$$T_1 + U_{1\to 2} = T_2$$



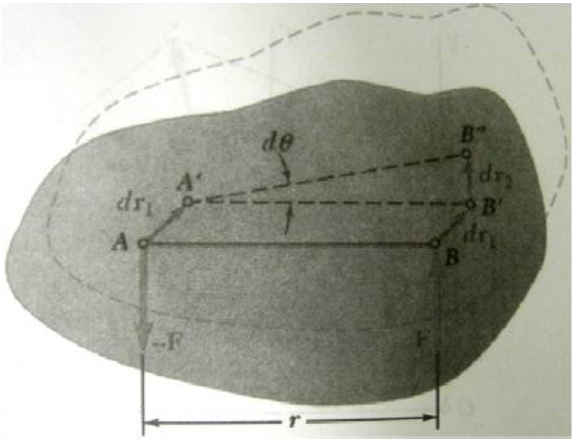
Work of Forces and Couples

کار نیروها و زوج نیرو ها

- کار نیرو های خارجی:

$$U_{1\to2} = \int_{A_1}^{A_2} \vec{F}.d\vec{r} = \int_{S_1}^{S_2} F\cos\alpha ds$$

- تذکر: در حرکت غلطشی بدون لغزش، کار نیروی اصطکاک صفر است زیرا نقطه تماس در لحظه ی اثر نیرو جابجایی ندارد.



- کار زوج نیرو های خارجی:

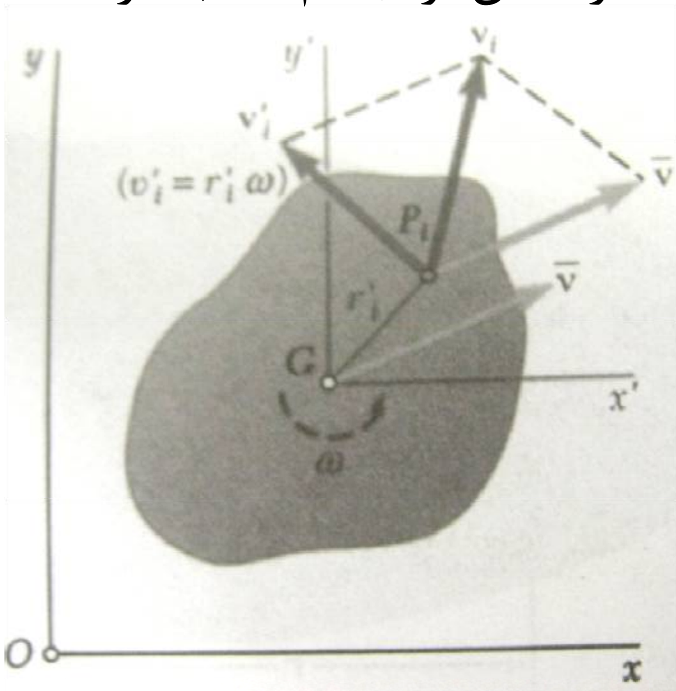
کار ناشی از چرخش + کار ناشی از جابجایی : کار کلی

$$U_{1\to2} = \vec{F}.d\vec{r}_1 - \vec{F}.d\vec{r}_1 + \int_{A'_1}^{A'_2} \vec{F}.d\vec{r}_2 = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \underbrace{Fr}_{M} d\theta$$

$$U_{1\to2} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M d\theta$$

Kinetic Energy of a Rigid Body in Plane Motion انرژی جنبشی اجسام صلب در حرکت صفحه ای

- با استفاده از تعریف سرعت هر المان از جسم صلب در دستگاه مختصات مرکز جرم داریم:

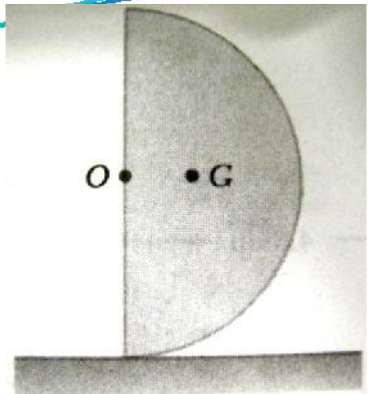


$$\vec{v}_i = \vec{\bar{v}} + \vec{v}'_i$$

$$T = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_i . \vec{v}_i) = \sum \frac{1}{2} m_i \vec{\bar{v}}^2 + \sum m_i \vec{\bar{v}} \vec{v}'_i + \sum m_i \overrightarrow{v'^2_i} = \frac{1}{2} m \bar{v}^2 + \sum \frac{1}{2} m_i (r'_i \omega)^2$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} m \bar{v}^2 + \frac{1}{2} \bar{I} \omega^2$$

مثال

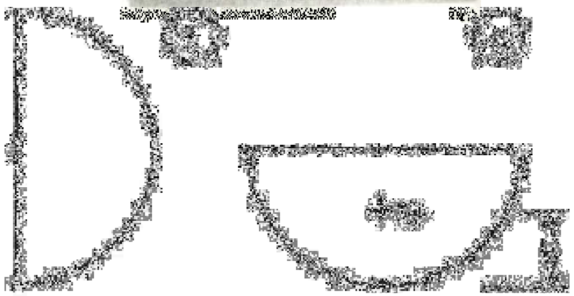


سیلندر نصفه ای به جرم m و شعاع r از حالت سکون مطابق شکل رها می شود. این سیلندر نصفه بدون لغزش می غلتد . تعیین کنید :

الف) سرعت زاویه ای بعد از اینکه سیلندر ۹۰° غلتید .

ب) عکس العمل در سطح افقی در همان لحظه

Position 1. $T_1 = 0 \qquad V_1 = 0$



Position 2. $V_2 = -mg(OG) = -\dfrac{4}{3\pi}mgr$

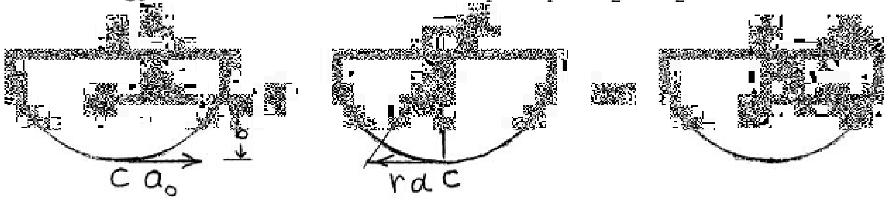
$$\bar{I} = \frac{1}{2}mr^2 - m\left(\frac{4r}{3\pi}\right)^2 = 0.319873mr^2$$

$$\bar{I} = \frac{1}{2}mr^2 - m\left(\frac{4r}{3\pi}\right)^2 = 0.319873mr^2$$

Kinematics: Point C is the instantaneous center. $\bar{v} = v_G = b\omega_2 = \left(r - \dfrac{4r}{3\pi}\right)\omega_2 = 0.57559r\omega_2$

Kinetic energy: $T_2 = \dfrac{1}{2}m\bar{v}^2 + \dfrac{1}{2}\bar{I}\omega^2 = \dfrac{1}{2}m(0.57559r\omega_2)^2 + \dfrac{1}{2}(0.319873)mr^2\omega_2^2 = 0.32559mr^2\omega_2^2$

(a) Conservation of energy. $T_1 + V_1 = T_2 + V_2$: $\quad 0 + 0 = 0.32559mr^2\omega_2^2 - \dfrac{4}{3\pi}mgr \qquad \omega_2^2 = 1.3035\dfrac{g}{r} \qquad \boldsymbol{\omega}_2 = 1.142\sqrt{\dfrac{g}{r}}$ ◀



Translation + Rotation about O = Rolling Motion

$$a_0 - r\alpha = 0 \qquad a_0 = r\alpha$$

$$\bar{a}_x = a_0 \quad (OG)\alpha = b\alpha \longrightarrow$$

$$\bar{a}_y = (OG)\omega_2^2 = \frac{4}{3\pi}r\omega_2^2 \uparrow$$

$+\circlearrowright\ \Sigma M_C = \Sigma(M_C)_{\text{eff}}$: $\quad 0 = bm\bar{a}_x + \bar{I}\alpha = mb^2\alpha + \bar{I}\alpha \qquad \alpha = 0, \qquad \bar{a}_x = 0$

$\xrightarrow{+}\ \Sigma F_x = m\bar{a}_x$: $\quad R_x = m\bar{a}_x \qquad R_x = 0$

$+\uparrow\ \Sigma F_y = m\bar{a}_y$: $\quad R_y - mg = m\left(\dfrac{4r}{3\pi}\right)\omega^2$

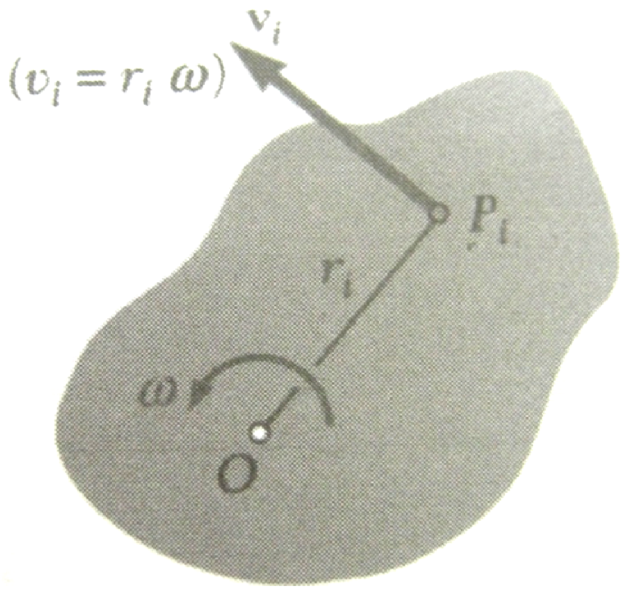
$$R_y = mg + m\left(\frac{4r}{3\pi}\right)1.3035\frac{g}{r} \qquad \mathbf{R} = 1.553\ mg \uparrow ◀$$

چرخش حول محور خارج از مرکز جرم Noncentroidal Rotation

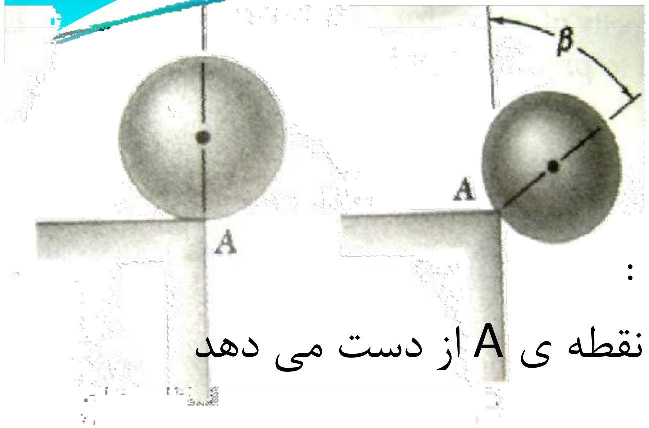
- با استفاده از رابطه ی بدست آمده برای انرژی جنبشی اجسام صلب داریم:

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} m\bar{v}^2 + \frac{1}{2} \bar{I}\omega^2$$

- همچنین این رابطه را می توان مستقیما از تعریف انرژی جنبشی برای تک تک المان های جسم صلب بدست آورد:



مثال



- گوی همگنی به شعاع r در گوشه ی A قرار دارد و به آن حرکت کوچک ساعتگردی داده می شود . با فرض اینکه گوشه ی A تیز است یعنی ضریب اصطکاک ایستایی در نقطه ی a بسیار بزرگ است تعیین کنید :

الف) زاویه ی B ای را که گوی چرخیده در لحظه ای که از تماسش را با نقطه ی A از دست می دهد

ب)سرعت مرکز گوی در لحظه ی مذکور

$$\bar{I} = \frac{2}{5}mr^2 \qquad \bar{v} = r\omega \qquad V = mgh = mgr\cos\beta$$

$$T = \frac{1}{2}m\bar{v}^2 + \frac{1}{2}\bar{I}\omega^2 = \frac{1}{2}\left(mr^2 + \frac{2}{5}mr^2\right)\omega^2 = \frac{7}{10}mr^2\omega^2$$

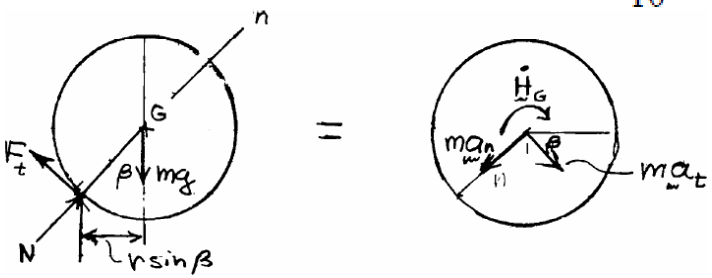
Position 1. $\beta_1 = 0,$ At rest: $\bar{v} = 0,\quad \omega = 0$

$T_1 = 0 \qquad V_1 = mgr$

Position 2. β_2 = angle when contact at A is lost.

$T_2 = \frac{7}{10}mr^2\omega_2^2 \qquad V_2 = mgr\cos\beta_2$

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \quad\Rightarrow\quad 0 + mgr = \frac{7}{10}mr^2\omega_2^2 + mgr\cos\beta_2 \quad\Rightarrow\quad r\omega_2^2 = \frac{10}{7}gr(1-\cos\beta_2) \quad\Rightarrow\quad \frac{\bar{v}_2^2}{r} = \frac{10}{7}g(1-\cos\beta_2)$$



When contact is lost, $\quad N = 0$ and $F_t = 0$

$$\sum F_n = \sum (F_{\text{eff}})_n: \quad -mg\cos\beta_2 = -ma_n = -\frac{m\bar{v}_2^2}{r} = -\frac{10}{7}mg(1-\cos\beta_2)$$

$$(a) \quad \frac{17}{7}\cos\beta_2 = \frac{10}{7} \quad\Rightarrow\quad \beta_2 = 54.0^\circ \blacktriangleleft$$

$$(b) \quad \bar{v}_2^2 = gr\cos\beta_2 = \frac{10}{17}gr \quad\Rightarrow\quad \bar{\mathbf{v}}_2 = 0.767\sqrt{gr} \ \measuredangle\ 54.0^\circ \blacktriangleleft$$

Conservation of Energy بقای انرژی

- اگر نیرو ها پایستار باشند:

$$\begin{cases} U_{1\to 2} = T_2 - T_1 \\ U_{1\to 2} = V_1 - V_2 \end{cases}$$

اصل کار و انرژی
نیرو های پایستار

$$\rightarrow T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$

- در حالت جامع تر وقتی نیرو ها پایستار نباشند:

$$U_{1\to 2} = (U_{1\to 2})_{Cons.} + (U_{1\to 2})_{nonCons.}$$

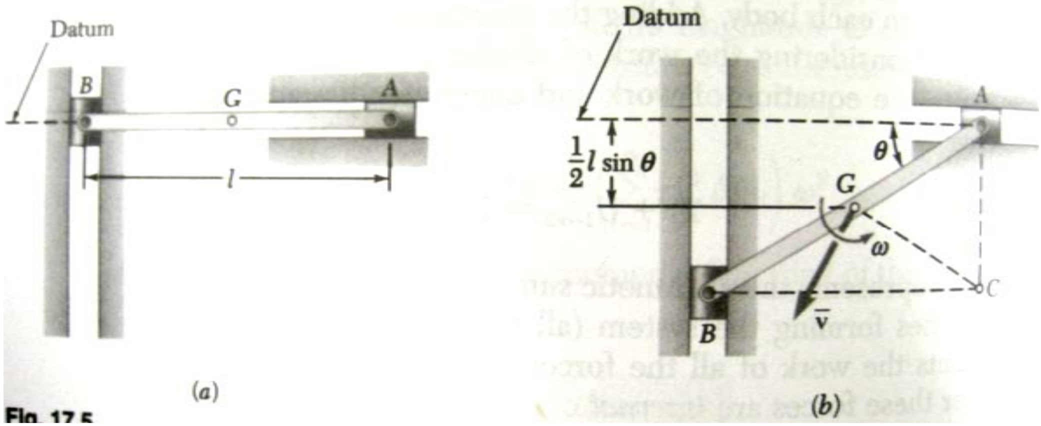
$$(U_{1\to 2})_{Cons.} + (U_{1\to 2})_{nonCons.} = T_2 - T_1$$

$$V_1 - V_2 + (U_{1\to 2})_{nonCons.} = T_2 - T_1$$

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2 + (U_{1\to 2})_{nonCons.}$$

مثال

- میله ی نازک AB با طول l و جرم m را در نظر بگیرید که از دو انتها به دو بلوک بدون جرم متصل می باشد، اگر بلوک ها به ترتیب مقید به حرکت در راستای افقی و قائم باشند و میله از حال ساکن و افقی رها شود، سرعت زاویه ای میله را به صورت تابعی از زاویه بدست آورید:



$$T_1 = 0, V_1 = 0$$

$$T_2 = \frac{1}{2}m\bar{v}^2 + \frac{1}{2}\bar{I}\omega^2 = \frac{1}{2}m(\frac{l}{2}\omega)^2 + \frac{1}{2}(\frac{1}{12}ml^2) = \frac{1}{6}ml^2\omega^2$$

$$V_2 = -W\bar{y} = -W\frac{l}{2}\sin\theta$$

$$\cancel{T_1} + \cancel{V}_1 = T_2 + V_2 \Rightarrow 0 + 0 = \frac{1}{6}ml^2\omega^2 - mg\frac{l}{2}\sin\theta \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{3g}{l}\sin\theta}$$

Power توان

- همان گونه که در فصل ۳ معرفی شد، توان عبارت است از آهنگ تغییرات زمانی کار می باشد، بنابراین برای جسم صلبی که نیروی F به مرکز جرم آن اثر می کند، داریم:

$$Power = \frac{dU}{dt} = F.\bar{v}$$

- به شکلی مشابه در مورد جسم صلبی که تحت ممانی موازی با محور دورانش، می چرخد، داریم:

$$Power = \frac{dU}{dt} = \frac{Md\theta}{dt} = M\omega$$

- در حالت کلی، اگر برایند نیروهایی که بر جسم اثر می کنند را با R و ممان آن ها حول مرکز جرم جسم صلب را با M نشان دهیم داریم:

$$P = F.v + M\omega$$

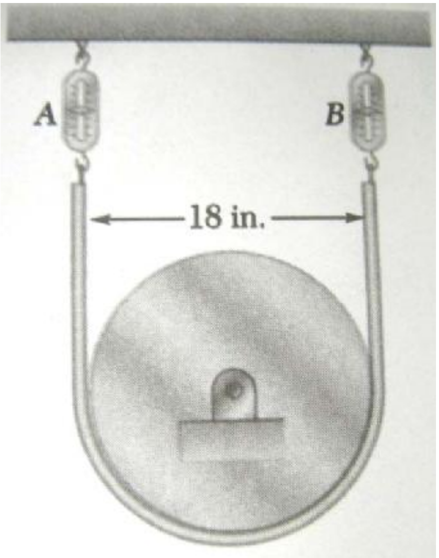
$$dU' = dT + dV$$

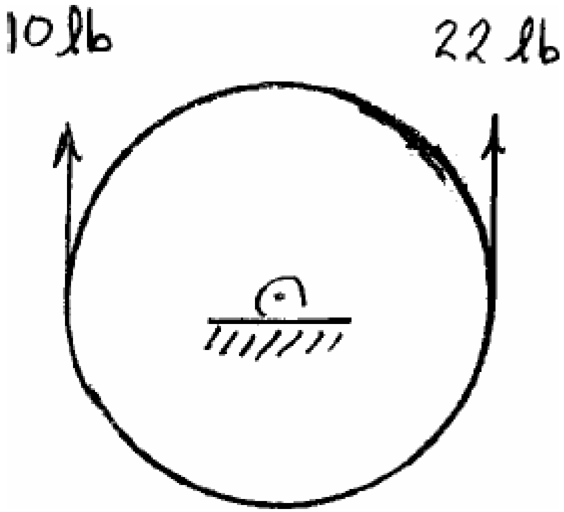
$$P = \frac{dU'}{dt} = \dot{T} + \dot{V} = \frac{d}{dt}(T+V)$$

$$\dot{T} = \frac{dT}{dt} = \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}m\bar{v}.\bar{v} + \frac{1}{2}\bar{I}\omega^2) = \frac{1}{2}m(\bar{a}.\bar{v} + \bar{v}.\bar{a}) + \bar{I}\omega\dot{\omega} = m\bar{a}.\bar{v} + \bar{I}\alpha(\omega) = R.\bar{v} + \bar{M}\omega$$

مثال

- وسیله ی آزمایشگاهی مقابل برای اندازه گیری توان خروجی یک توربین کوچک مورد استفاده قرار می گیرد. وقتی توربین با سرعت 200rpm کار می کند اعداد 10lb و 22lb از روی دو فنر خوانده می شود. توانی که توسط توربین ایجاد میشود را بدست آورید .





$\omega = 200 \text{ rpm} = 20.944 \text{ rad/s}$

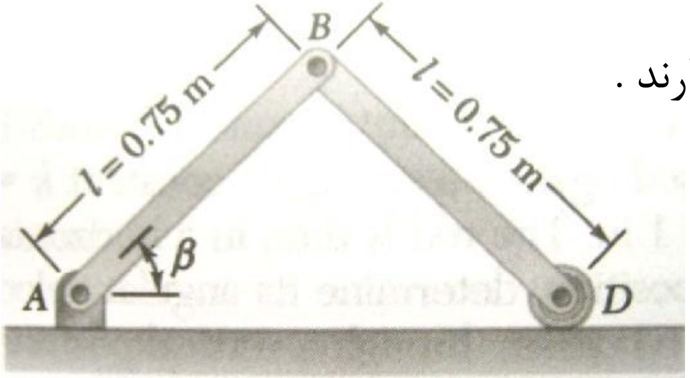
Moments about the fixed axle.

$$M = (22 \text{ lb} - 10 \text{ lb})\left(\frac{9}{12}\text{ft}\right) = 9 \text{ lb}\cdot\text{ft}$$

$$\text{Power} = M\omega = (9)(20.994) = 188.5 \text{ lb}\cdot\text{ft/s}$$

$$\frac{188.5 \text{ lb}\cdot\text{ft/s}}{550 \text{ lb}\cdot\text{ft/s/hp}} \Rightarrow \quad \text{Power} = 0.343 \text{ hp} \blacktriangleleft$$

مثال مروری ۱

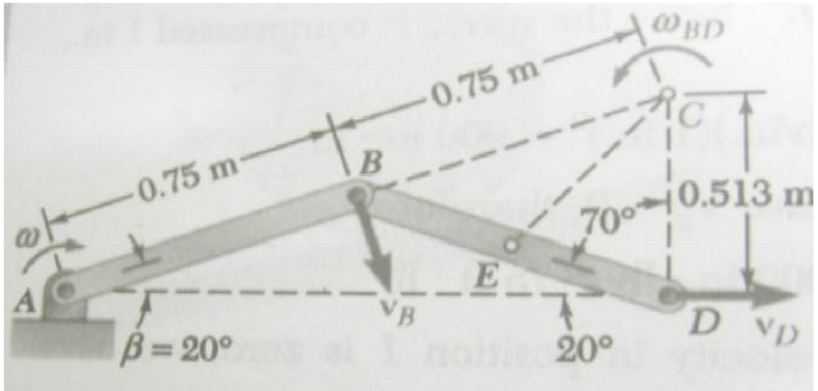


- هر کدام از میله های باریک مقابل 0.75m طول و 6Kg وزن دارند .

اگر سیستم از حال سکون با $\beta = 60^o$ رها شود تعیین کنید :

الف) سرعت زاویه ای میله ی AB وقتی $\beta = 20^o$

ب) سرعت نقطه ی D در همان لحظه



$BC = 0.75(m)$

$CD = 2(0.75)\sin 20^o = 0.513(m)$

$EC = 0.522(m)$

$\overline{v}_{AB} = 0.375\omega \qquad v_B = 0.75\omega$

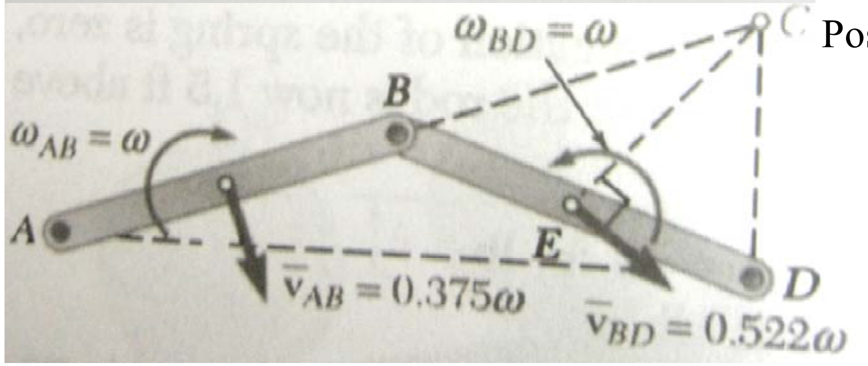
$v_B = (BC)\omega_{BD} = 0.75\omega_{BD} = 0.75\omega \Rightarrow \omega_{BD} = \omega$

$\overline{v}_{BD} = (EC)\omega_{BD} = 0.522\omega \Rightarrow \overline{v}_{BD} = 0.522\omega$

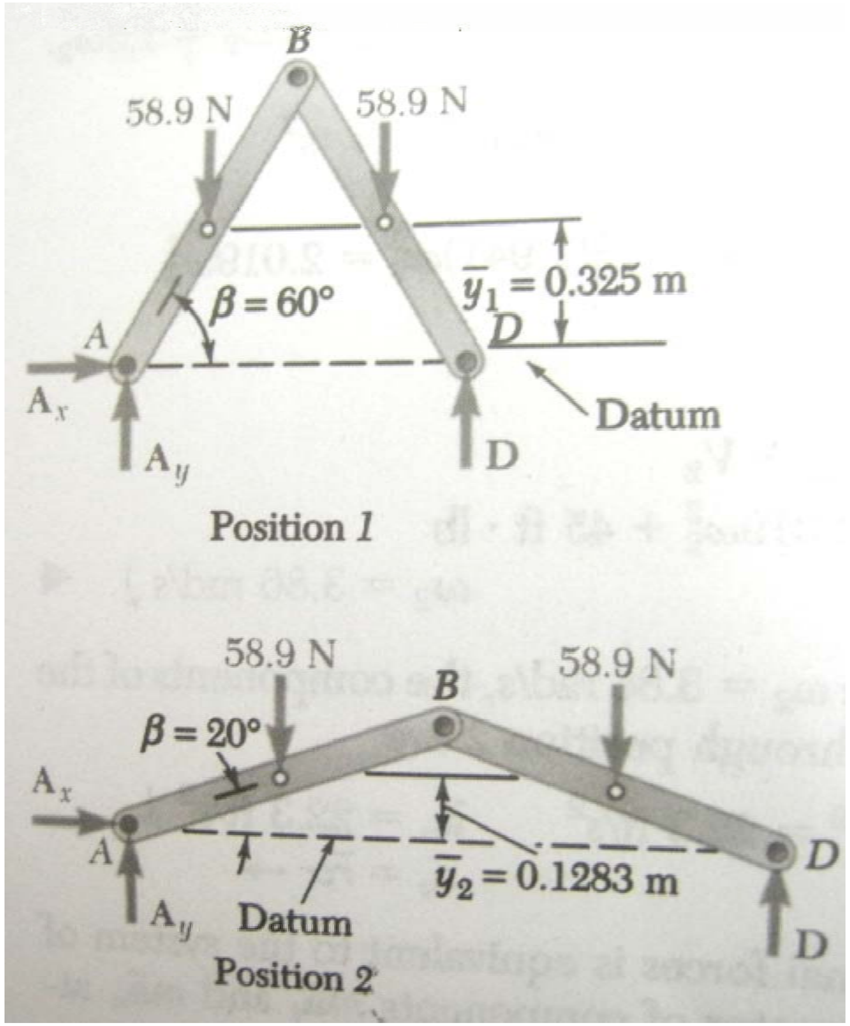
Position 1: $W = 6\times 9.81 = 58.86(N)$

$Potential\ Energy: V_1 = 2W\overline{y}_1 = 2\times 58.86\times 0.325 = 38.26(J)$

$Kinetic\ Energy\ :\ T_1 = 0$



ادامه ی مثال مروری ۱



Position 2:

$$Potential\ Energy: V_2 = 2W\bar{y}_2 = 2\times 58.86\times 0.1283 = 15.10(J)$$

$$Kinetic\ Energy\ :$$

$$I_{AB} = \bar{I}_{BD} = \frac{1}{12}ml^2 = \frac{1}{12}6\times 0.75^2 = 0.281$$

$$T_2 = \frac{1}{2}m\bar{v}_{AB}^{\ 2} + \frac{1}{2}\bar{I}_{AB}\omega_{AB}^{\ 2} + \frac{1}{2}m\bar{v}_{BD}^{\ 2} + \frac{1}{2}\bar{I}_{BD}\omega_{BD}^{\ 2}$$

$$T_2 = \frac{1}{2}6\times(0.375\omega)^2 + \frac{1}{2}0.281\times\omega^2 + \frac{1}{2}6\times(0.522\omega)^2 + \frac{1}{2}0.281\times\omega^2$$

$$T_2 = 1.520\omega^2$$

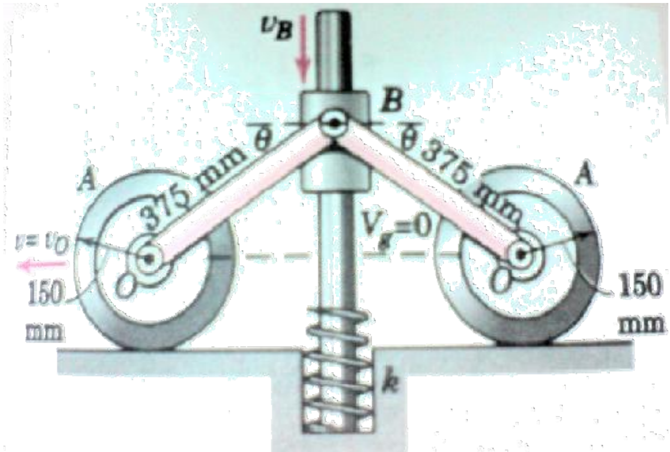
$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \ \Rightarrow 0+38.26 = 1.520\omega^2 + 15.10 \Rightarrow \omega = 3.90$$

$$\omega_{AB} = 3.90\frac{rad}{s}(clockwise)$$

$$v_D = (CD)\omega = 0.513\times 3.90 \Rightarrow v_D = 2\frac{m}{s} \rightarrow$$

مثال مروری ۲

- در مکانیسمی مطابق شکل جرم هر یک از دو چرخ 30Kg و شعاع چرخش مرکزواری آن 100mm است. جرم هر میله ی OB برابر 10Kg است و می توان آن را میله ی باریک در نظر گرفت . طوقه ی B به جرم 7Kg روی میل محور عمودی ثابت با اصطکاک قابل چشم پوشی می لغزد. سفتی فنر k=30kN/m است و هنگامی که میله ها به وضعیت افقی برسند با سطح زیرین طوقه تماس پیدا می کند. طوقه از حالت سکون در وضعیت θ=45° رها می شود و اصطکاک برای جلوگیری از لغزش چرخ ها کافی است . مطلوب است تعیین :



الف) سرعت v_B طوقه وقتی برای نخستین بار با فنر بر خورد می کند .

ب)x , حداکثر تغییر طول فنر

الف) حالت های ۱و۲و۳ را به ترتیب در وضعیت های θ=45° و θ=0 و حداکثر تغییر طول فنر تعریف می کنیم .

$$T_2 = [2(\frac{1}{2}I_O\omega^2)]_{rods} + [\frac{1}{2}mv^2]_{collar} = \frac{1}{3}10\times(0.375)^2(\frac{v_B}{0.375})^2 + \frac{1}{2}7v_B{}^2 = 6.83v_B{}^2$$

ادامه ی مثال مروری ۲

طوقه B به اندازه $\frac{0.375}{\sqrt{2}} = 0.265(m)$ پایین می آید و در نتیجه :

$$V_1 = 2(10)(9.81)\frac{0.265}{2} + 7(9.81)(0.265) = 44.2(J) \qquad , \qquad V_2 = 0$$

$$T_1 + V_1 + U'_{1\to 2} = T_2 + V_2 \Rightarrow 0 + 44.2 + 0 = 6.83{v_B}^2 + 0 \Rightarrow v_B = 2.54\frac{m}{s}$$

در وضعیت حداکثر تغییر طول x فنر همه ی قطعات به طور لحظه ای متوقف می شوند و در نتیجه $T_3=0$. پس :

$$T_1 + V_1 + U'_{1\to 3} = T_3 + V_3 \Rightarrow$$

$$0 + 2(10)(9.81)\frac{0.265}{2} + 7(9.81)(0.265) + 0 = 0 - 2(10)(9.81)\frac{x}{2} - 7(9.81)x + \frac{1}{2}(30)(10^3)x^2$$

$$x = 60.1mm$$

Momentum and Impulse Methods

روش های اندازه حرکت و تکانه

- اصل تکانه و اندازه حرکت
- روابط اندازه حرکت خطی و زاویه ای برای جسم صلب
- دوران حول محور خارج از مرکز جرم
- بقای اندازه حرکت

Principle of Impulse and Momentum for the Plane Motion of a Rigid Body

اصل تکانه و اندازه حرکت برای حرکت صفحه ای جسم صلب

- اگر سیستم ذرات را در نظر بگیریم، اصل تکانه و اندازه ی حرکت به صورت زیر خواهد بود:

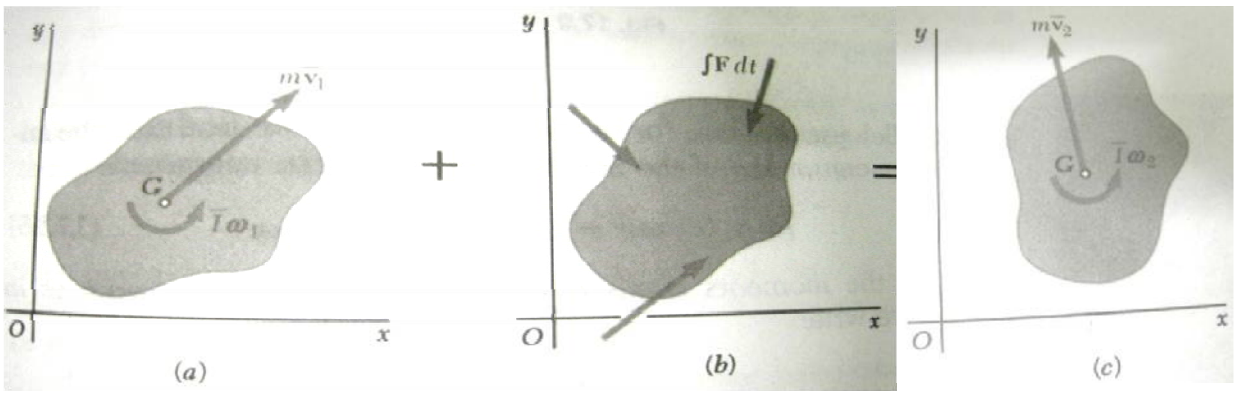
اندازه حرکت ثانویه ی سیستم = تکانه ی وارد شده به سیستم + اندازه حرکت سیستم

- در رابطه ی فوق اندازه حرکت به صورت مجموع دو بردار اندازه حرکت خطی و زاویه ای به صورت زیر تعریف می شود:

$$\begin{cases} \vec{L} = \sum_{i=1}^{n} \iiint_{m_i} v \, dm \\ \vec{H}_G = \sum_{i=1}^{n} \iiint_{m_i} r' \times v \, dm \end{cases}$$

- اگر حرکت یک جسم صلب در صفحه را در نظر بگیریم روابط فوق به صورت زیر ساده خواهند شد:

$$\begin{cases} \vec{L} = m\vec{\bar{v}} \\ H_G = \bar{I}\,\omega \end{cases}$$



Linear Momentum of a Rigid Body اندازه حرکت خطی جسم صلب

- اصل تکانه و اندازه حرکت برای اندازه حرکت خطی یک جسم صلب در حرکت صفحه ای به صورت زیر در می آید:

$$\begin{cases} \vec{L} = m\vec{\bar{v}} \\ \sum \vec{F}_{ext} = \dot{\vec{L}} \\ \vec{L}_1 + \int_{t_1}^{t_2} \sum \vec{F}_{ext} dt = \vec{L}_2 \end{cases}$$

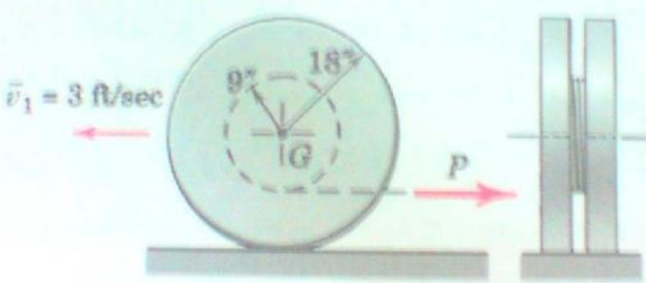
Angular Momentum of a Rigid Body اندازه حرکت زاویه ای جسم صلب

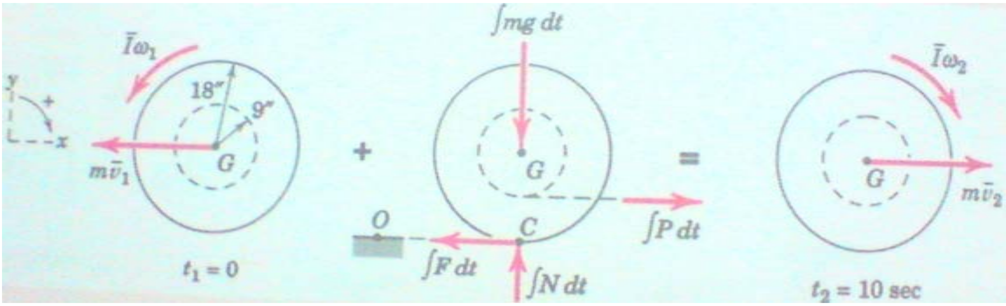
- اصل تکانه و اندازه حرکت برای اندازه حرکت زاویه ای حول مرکز جرم یک جسم صلب در حرکت صفحه ای به صورت زیر در می آید:

$$\begin{cases} \vec{H}_G = \bar{I}\,\vec{\omega} \xrightarrow{\text{حرکت صفحه ای}} H_G = \bar{I}\,\omega \\ \sum \vec{M}_G = \dot{H}_G \\ (H_G)_1 + \int_{t_1}^{t_2} \sum M_G\,dt = (H_G)_2 \end{cases}$$

مثال

- نیروی P که بر کابل پیچیده شده دور توپی مرکزی چرخ متقارن وارد می شود به آهستگی و طبق رابطه ی P=1.5t افزایش میابد که در آن P بر حسب پوند و t زمان بر حسب ثانیه پس از اعمال نیروی P است . مطلوب است تعیین سرعت زاویه ای ω_2 چرخ ۱۰ ثانیه پس از اعمال نیروی P هرگاه چرخ به سمت چپ غلتش کند و سرعت مرکز آن در لحظه ی t=0 برابر 3ft/sec باشد . وزن چرخ 120lb و شعاع چرخش آن حول مرکزش 10in است. چرخ غلتش بدون لغزش انجام می دهد.





$$[(G_x)_1+\int_{t_1}^{t_2}\sum F_x dt=(G_x)_2]\Rightarrow \frac{120}{32.2}(-3)+\int_0^{10}(1.5t-F)dt=\frac{120}{32.2}[\frac{18}{12}\omega_2] \qquad \text{(I)}$$

$$[(H_G)_1+\int_{t_1}^{t_2}\sum M_G dt=(H_G)_2]\Rightarrow \frac{120}{32.2}(\frac{10}{12})^2(-\frac{3}{\frac{18}{12}})+\int_0^{10}[\frac{18}{12}F-\frac{9}{12}(1.5t)]dt=\frac{120}{32.2}(\frac{10}{12})^2\omega_2 \qquad \text{(II)}$$

$$\overset{(I),(II)}{\Rightarrow}\ \omega_2=3.13\frac{rad}{s}(clockwise)$$

Noncentroidal Rotation

دوران حول محوری خارج از مرکز جرم

- اصل تکانه و اندازه حرکت برای اندازه حرکت زاویه ای یک جسم صلب در دوران حول نقطه ای خارج از مرکز جرم به صورت زیر در می آید:

$$
\begin{cases}
H_O = \bar{I}\omega + (m\bar{r}\omega)\bar{r} = (\bar{I} + m\bar{r}^2)\omega = I_O\omega \\
\sum M_O = \dot{H}_O \\
(H_0)_1 + \int_{t_1}^{t_2} \sum M_O dt = (H_0)_2
\end{cases}
$$

مثال

- نیروی P که بر کابل پیچیده شده دور توپی مرکزی چرخ متقارن وارد می شود به آهستگی و طبق رابطه ی P=1.5t افزایش میابد که در آن P بر حسب پوند و t زمان بر حسب ثانیه پس از اعمال نیروی P است . مطلوب است تعیین سرعت زاویه ای ω_2 چرخ ۱۰ ثانیه پس از اعمال نیروی P هرگاه چرخ به سمت چپ غلتش کند و سرعت مرکز آن در لحظه ی t=0 برابر 3ft/sec باشد . وزن چرخ 120lb و شعاع چرخش آن حول مرکزش 10in است. چرخ غلتش بدون لغزش انجام می دهد.

لنگرهای وزن 120lb و نیروی مساوی N یکدیگر را خنثی می کنند و F حذف می شود . زیرا لنگر آن حول نقطه ی O صفر است . بنابراین اندازه حرکت زاویه ای حول O عبارت است از :

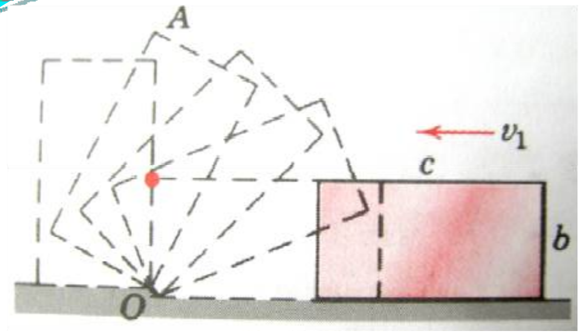
$$H_O = \bar{I}\omega + m\bar{v}r = m\bar{k}^2\omega + mr^2\omega = m(\bar{k}^2 + r^2)\omega$$

بنابراین مشاهده می کنیم که : $H_O = H_C$ زیرا : $\bar{k}^2 + r^2 = k_C^2$ و $H_C = I_C\omega = mk_C^2\omega$

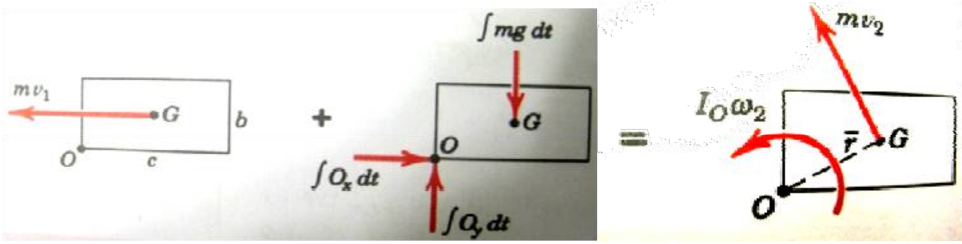
$$(H_0)_1 + \int_{t_1}^{t_2} \sum M_O dt = (H_0)_2$$

$$\frac{120}{32.2}[(\frac{10}{12})^2 + (\frac{18}{12})^2][-\frac{3}{\frac{18}{12}}] + \int_0^{10} 1.5t(\frac{18-9}{12})dt = \frac{120}{32.2}[(\frac{10}{12})^2 + (\frac{18}{12})^2]\omega_2 \Rightarrow \omega_2 = 3.13\frac{rad}{s}(clockwise)$$

مثال



- قطعه مستطیلی یکنواختی که ابعاد آن مطابق شکل است وقتی به پله ی کوچک O برخورد می کند با سرعت v_1 روی سطح افقی به سمت چپ می لغزد . واجهش در پله قابل چشم پوشی است . مطلوب است محاسبه ی مقدار حداقل v_1 که به قطعه امکان می دهد آزادانه حول O نوسان کند و درست با سرعت صفر به وضعیت A برسد . n درصد درصد اتلاف انرژی را در حالتی که b=c تعیین کنید.



I) برخورد

$$(H_O)_1 = mv_1\frac{b}{2} \quad , \quad H_O = I_O\omega \Rightarrow (H_O)_2 = [\frac{1}{12}m(b^2+c^2)+m((\frac{c}{2})^2+(\frac{b}{2})^2)]\omega_2 = \frac{m}{3}(b^2+c^2)\omega_2$$

$$(H_O)_1 = (H_O)_2 \Rightarrow mv_1\frac{b}{2} = \frac{m}{3}(b^2+c^2)\omega_2 \Rightarrow \omega_2 = \frac{3v_1 b}{2(b^2+c^2)}$$

II) چرخش حول O

$$T_2+V_2 = T_3+V_3 \Rightarrow \frac{1}{2}I_O\omega_2^2+0 = 0+mg[\sqrt{(\frac{b}{2})^2+(\frac{c}{2})^2}-\frac{b}{2}$$

$$\frac{1}{2}\frac{m}{3}(b^2+c^2)[\frac{3v_1 b}{2(b^2+c^2)}]^2 = \frac{mg}{2}(\sqrt{b^2+c^2}-b) \Rightarrow v_1 = 2\sqrt{\frac{g}{3}(1+\frac{c^2}{b^2})(\sqrt{b^2+c^2}-b)}$$

$$n = \frac{|\Delta E|}{E} = \frac{\frac{1}{2}mv_1^2-\frac{1}{2}I_O\omega_2^2}{\frac{1}{2}mv_1^2} = 1-\frac{k_O^2\omega_2^2}{v_1^2} = 1-(\frac{b^2+c^2}{3})(\frac{3b}{2(b^2+c^2)})^2 = 1-\frac{3}{4(1+\frac{c^2}{b^2})} \overset{n \text{ for b=c}}{\Rightarrow} n = 62.5\%$$

Conservation of Momentum

بقای اندازه حرکت

- همان طور که در مثال های قبلی مشاهده شد، اگر تکانه ای به سیستم اعمال نشود، اندازه حرکت پایسته می ماند.
- از آنجایی که اندازه حرکت و تکانه هر دو کمیت های برداری اند، سه معادله ی اسکالری مستقل زیر نتیجه می شود.

$$\begin{cases} \vec{L}_1 = \vec{L}_2 \Rightarrow \begin{cases} (L_1)_x = (L_2)_x & \text{(I)} \\ (L_1)_y = (L_2)_y & \text{(II)} \end{cases} \\ (H_G)_1 = (H_G)_2 \quad \text{or} \quad (H_O)_1 = (H_O)_2 \quad \text{(III)} \end{cases}$$

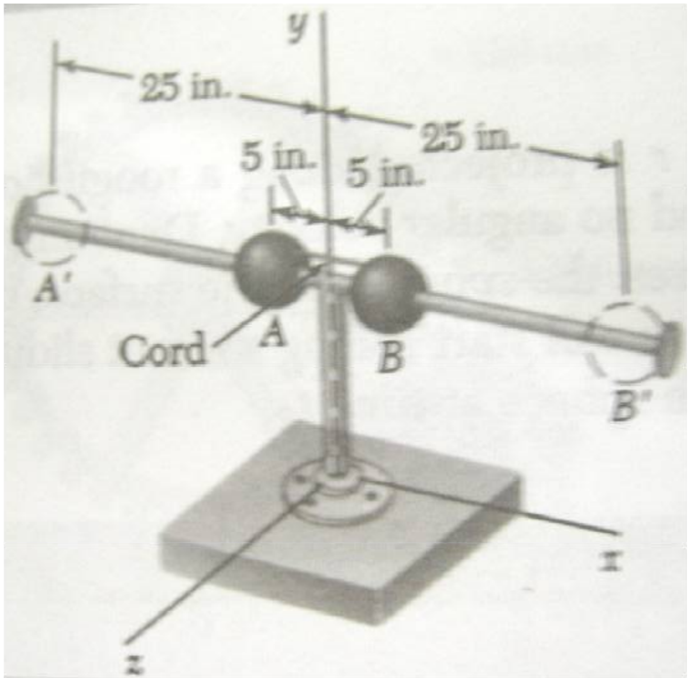
- باید توجه داشت که بقای اندازه حرکت در یک راستا هیچ ارتباطی با بقا یا عدم بقای اندازه حرکت در راستاهای دیگر را ندارد.

مثال

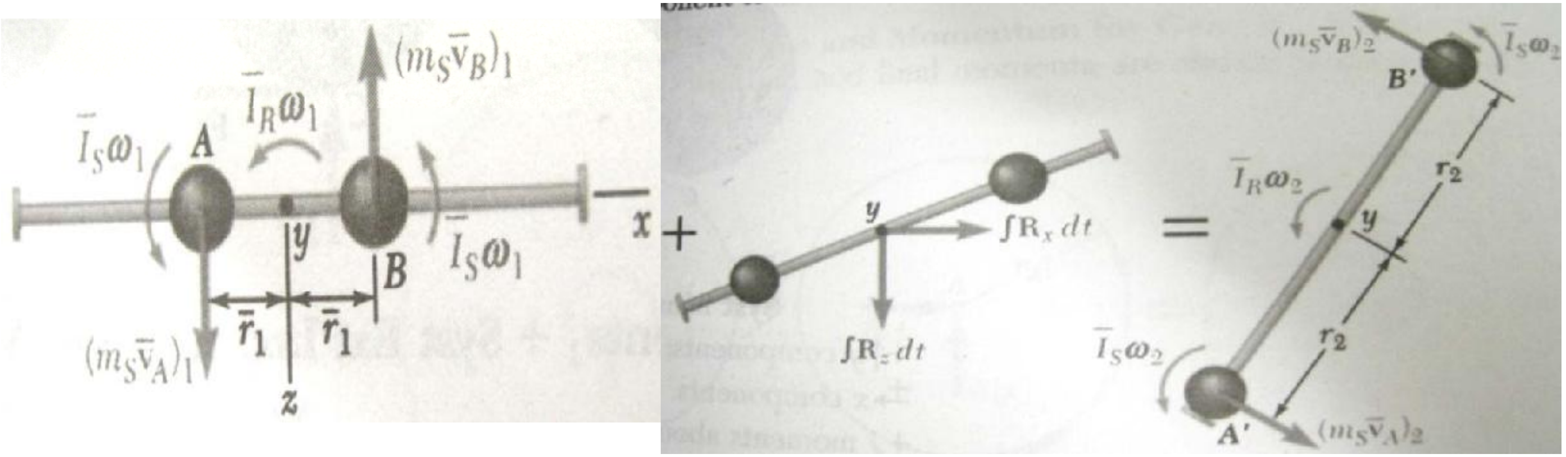
- دو کره ی جامد به شعاع 3in که وزن هر کدام از آن ها 2lb است در نقاط A و B روی میله ی افقی A’B’ قرار دارند . که این میله میتواند به طور آزادانه حول محور عمودی با سرعت زاویه ای خلاف جهت عقربه های ساعت به اندازه ی 6rad/s بچرخد. کره ها بوسیله ی طنابی به همدیگر متصل اند که به طور ناگهانی بریده می شود . با توجه به اینکه $I_R=0.25(lb.ft.s^2)$ برای میله است . تعیین کنید :

الف) سرعت زاویه ای میله بعد از اینکه گلوله ها به نقاط A’ و B’ رسیدند .

ب) انرژی هدر رفته با توجه به برخورد نا کشسان گلوله ها و نگه دارنده های A’ و B’ .



ادامه ی مثال



$$Syst.Momenta_1 + Syst.Ext.\mathrm{Imp}_{1\to 2} = Syst.Momenta_2$$

$$2(m_s\bar{r}_1\omega_1)\bar{r}_1 + 2\bar{I}_S\omega_1 + \bar{I}_R\omega_1 = 2(m_s\bar{r}_2\omega_2)\bar{r}_2 + 2\bar{I}_S\omega_2 + \bar{I}_R\omega_2$$

$$(2m_s\bar{r}_1^2 + 2\bar{I}_S + \bar{I}_R)\omega_1 = (2m_s\bar{r}_2^2 + 2\bar{I}_S + \bar{I}_R)\omega_2$$

$$\bar{I}_S = \frac{2}{5}m_s a^2 = \frac{2}{5}(\frac{2}{32.2})(\frac{3}{12})^2 = 0.00155(lb.ft.s^2)$$

$$m_s\bar{r}_1^2 = (\frac{2}{32.2})(\frac{5}{12})^2 = 0.0108 \qquad , \qquad m_s\bar{r}_2^2 = (\frac{2}{32.2})(\frac{25}{12})^2 = 0.2696$$

$$\bar{I}_R = 0.25 \quad , \quad \omega_1 = 6 \qquad \Rightarrow 0.275\times 6 = 0.792\omega_2 \Rightarrow \omega_2 = 2.08$$

$$T = 2(\frac{1}{2}m_s\bar{v}^2 + \frac{1}{2}\bar{I}_S\omega^2) + \frac{1}{2}\bar{I}_R\omega^2 = \frac{1}{2}(2m_s\bar{r}^2 + 2\bar{I}_S + \bar{I}_R)\omega^2$$

$$T_1 = \frac{1}{2}(0.275)(6)^2 = 4.95 \qquad T_2 = \frac{1}{2}(0.792)(2.08)^2 = 1.713 \qquad \Delta T = T_2 - T_1 = -3.24(ft.lb)$$

Eccentric Impact برخورد غیر مرکزی

انواع برخورد

- مرکزی
- غیر مرکزی

برخورد مرکزی

- مستقیم
- غیر مستقیم

برخورد غیر مرکزی

فقط برای اجسام صلب می تواند رخ دهد

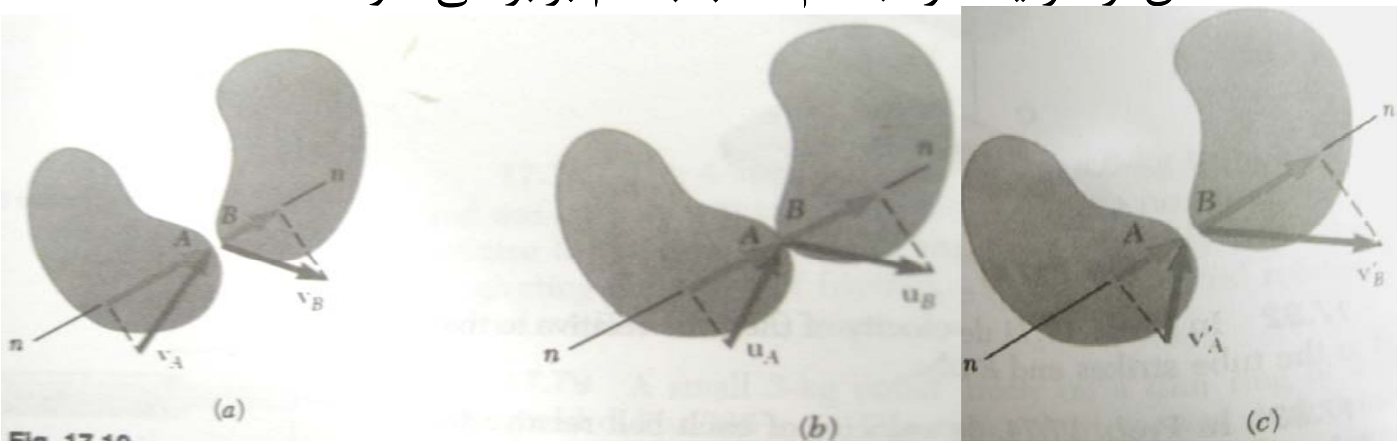
- مستقیم
- غیر مستقیم

Eccentric Impact برخورد غیر مرکزی

- برخورد غیرمرکزی، به برخوردی گفته می شود که خط واصل مراکز جسم اجسام صلب برخورد کنند، منطبق بر خط برخورد نباشد.
- همان طور که پیش تر معرفی شد، برخورد شامل دو بازه ی زمانی Deformation Period و Restitution Period می باشد.
- ضریب استرداد به صورت نسبت تکانه ی وارد شده در بازه ی زمانی استرداد به تکانه ی وارد شده در بازه ی زمانی تغییر شکل.

$$e = \frac{\int R\,dt}{\int P\,dt} \qquad 0 \le e \le 1$$

- همان طور که در شکل های زیر مشاهده می شود، در لحظه ای که تغییر شکل ها به حداکثر خود می رسند، سرعت نقاط تماس از هر یک از اجسام صلب با هم برابر می شود.

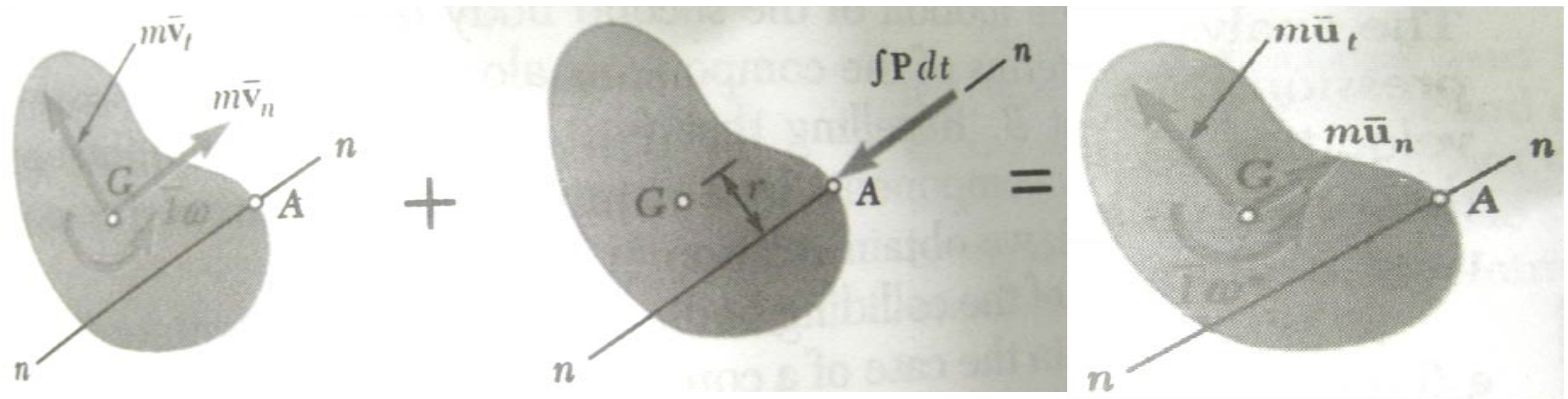


Eccentric Impact برخورد غیر مرکزی

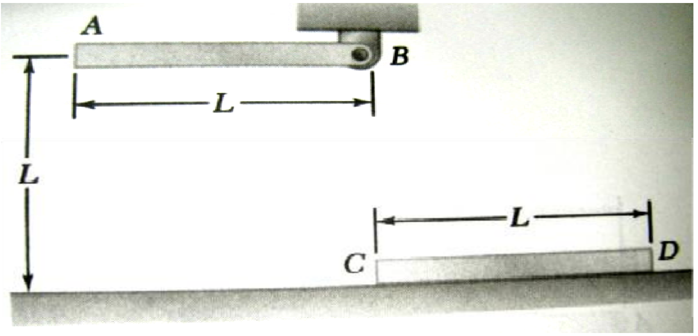
- در این اسلاید نشان می دهیم که رابطه ای که در برخورد مرکزی برای ضریب استرداد بدست آوردیم، معتبر می ماند.

$$
\begin{cases} m\bar{v}_n - \int P dt = m\bar{u}_n & \text{(I)} \\ \bar{I}\omega - \int rPdt = \bar{I}\omega^* & \text{(II)} \end{cases}
\qquad
\begin{cases} m\bar{u}_n - \int R dt = m\bar{V}_n' & \text{(III)} \\ \bar{I}\omega - \int rRdt = \bar{I}\omega' & \text{(IV)} \end{cases}
\Rightarrow
\left.\begin{aligned} & e = \frac{\int Rdt}{\int Pdt} = \frac{\bar{u}_n - \bar{v}_n'}{\bar{v}_n - \bar{u}_n} \quad \text{(From (I) \&(III))} \\ & e = \frac{\int Rdt}{\int Pdt} = \frac{\omega^* - \omega'}{\omega - \omega^*} \quad \text{(From (II) \& (IV))} \end{aligned}\right\}
\Rightarrow e = \frac{(\bar{u}_n \pm r\omega^*) - (v_n' \pm r\omega')}{(\bar{v}_n \pm r\omega) - (\bar{u}_n \pm r\omega^*)}
$$

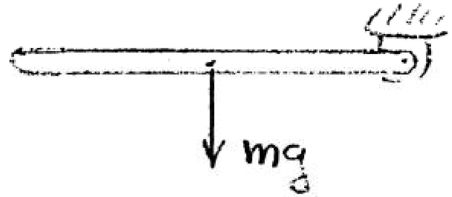
$$
\left.\begin{aligned} & \text{For A:} \quad e = \frac{(u_A)_n - (v_A')_n}{(v_A)_n - (u_A)_n} \\ & \text{For B:} \quad e = \frac{(u_B)_n - (v_B')_n}{(v_B)_n - (u_B)_n} \end{aligned}\right\}
\Rightarrow \boxed{e = \frac{(v_B')_n - (v_A')_n}{(v_A)_n - (v_B)_n}}
$$



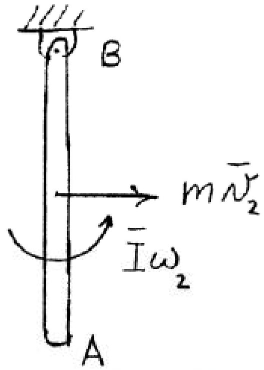
مثال ۱



- میله ی باریک AB از حال سکون مانند شکل رها می شود . می چرخد تا به حالت عمودی برسد و بهم میله ی همانند دیگری به اسم CD که روی سطح بدون اصطکاکی قرار دارد برخورد می کند . با فرض اینکه ضریب استرداد بین دو میله 0.4 باشد سرعت میله ی CD را درست بعد از لحظه ی برخورد تعیین کنید.



Position 1



Position 2

$$\bar{I} = \frac{1}{12} mL^2$$

$$V_1 = 0 \qquad T_1 = 0 \qquad V_2 = -mg\frac{L}{2}$$

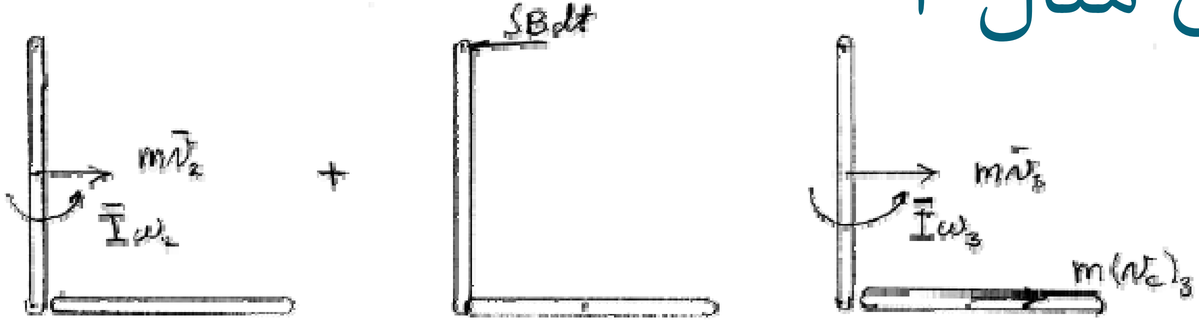
$$T_2 = \frac{1}{2} m\bar{v}_2^2 + \frac{1}{2}\bar{I}\omega_2^2 = \frac{1}{2} m\left(\frac{L}{2}\omega_2\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}mL^2\right)\omega_2^2 = \frac{1}{6} mL^2\omega_2^2$$

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2: \qquad 0 + 0 = \frac{1}{6} mL^2\omega_2^2 - mg\frac{L}{2} \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{3g}{L}} \circlearrowright$$

$$\bar{\mathbf{v}}_2 = \frac{L}{2}\sqrt{\frac{3g}{L}} \longrightarrow \qquad (v_B)_2 = L\omega = \sqrt{3gL}$$

$$(v_C)_3 - (v_B)_3 = e(v_B)_2 \quad \Longrightarrow \quad (v_C)_3 - L\omega_3 = e\sqrt{3gL} \qquad (v_C)_3 = L\omega_3 + e\sqrt{3gL}$$

ادامه ی مثال ۱



Syst Momenta$_2$ + Syst Ext Imp$_{2\to3}$ = Syst Momenta$_3$

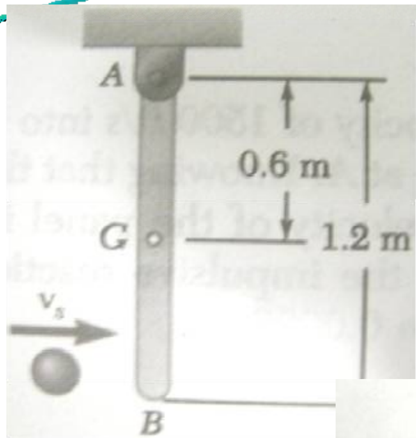
moments about B: $$m\bar{v}_2\frac{L}{2}+\bar{I}\omega_2+0=m\bar{v}_3\frac{L}{2}+\bar{I}\omega_3+m(v_C)_3L$$

$$m\left(\frac{L}{2}\sqrt{\frac{3g}{L}}\right)\frac{L}{2}+\frac{1}{12}mL^2\sqrt{\frac{3g}{L}}+0=m\left(\frac{L}{2}\omega_3\right)\frac{L}{2}+\frac{1}{12}mL^2\omega_3+m\left(L\omega_3+e\sqrt{3gL}\right)L$$

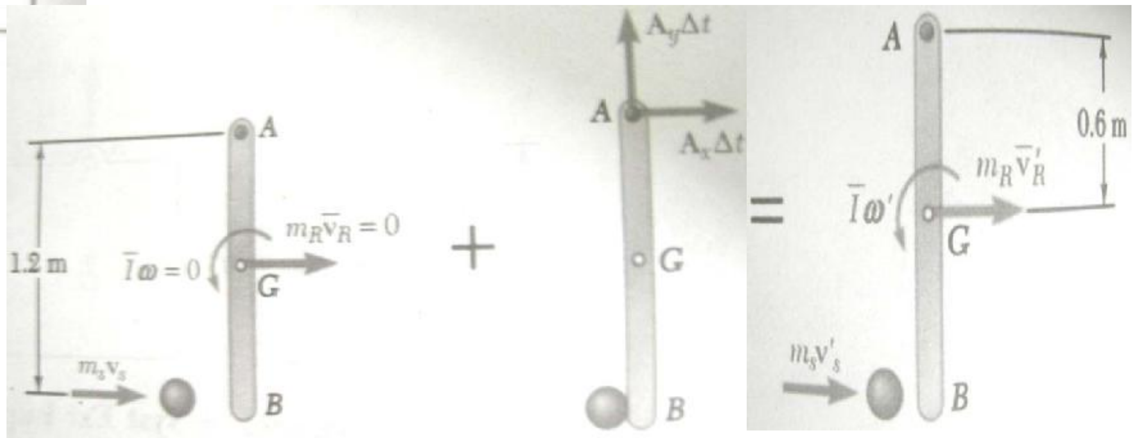
$$\omega_3=\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{4}e\right)\sqrt{\frac{3g}{L}} \qquad (v_C)_3=\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{4}e\right)\sqrt{3gL}+e\sqrt{3gL} \qquad (v_C)_3=\frac{1}{4}(1+e)\sqrt{3gL}$$

For $e=0.4$, $$(v_C)_3=\frac{1}{4}(1+0.4)\sqrt{3gL} \quad\Rightarrow\quad (\mathbf{v}_C)_3=0.606\sqrt{gL}\longrightarrow$$ ◀

مثال ۲



- گلوله ای به جرم 2Kg که به طور افقی به سمت راست حرکت می کند دارای سرعت اولیه ی 5m/s است که به انتهای پایینی میله ی AB به جرم 8Kg برخورد می کند . با توجه به اینکه ضریب استرداد بین میله و گلوله 0.8 است سرعت زاویه ای میله و سرعت گلوله درست در لحظه ی بعد از برخورد را تعیین کنید.



$$moment \text{ about A} : m_s v_s(1.2) = m_s v'_s(1.2) + m_R \bar{v}'_R(0.6) + \bar{I}\omega'$$

$$\bar{I} = \frac{1}{12}ml^2 = \frac{1}{12}(8)(1.2)^2 = 0.96(kg.m^2)$$

$$\Rightarrow 2(5)(1.2) = 2(v'_s)(1.2) + 8(0.6)(\omega')(0.6) + (0.96)\omega'$$

$$\Rightarrow 12 = 2.4v'_s + 3.84\omega'$$

$$v'_B - v'_s = e(v_s - v_B) \Rightarrow v'_B - v'_s = 0.80(5) \qquad , \qquad v'_B = 1.2\omega'$$

$$\Rightarrow \omega' = 3.21\frac{rad}{s} \qquad , \qquad v'_S = -0.143\frac{m}{s} \leftarrow$$

Chapter Review مرور فصل

- معادلات حاکم بر حرکت اجسام صلب
- معادلات حرکت صفحه ای
- معادلات ممان دیگر
- روش حل مسائل شامل حرکت جسم صلب
- حرکت انتقالی
- دوران حول مرکز جرم
- حرکت صفحه ای در حالت کلی
- حرکات مقید
- چرخش حول محوری خارج از مرکز جرم
- حرکت غلطشی

- اصل کار و انرژی
- کار نیروها و زوج نیرو ها
- انرژی جنبشی اجسام صلب
- چرخش حول محور خارج از مرکز جرم
- بقای انرژی
- توان

روش های انرژی

نیرو- شتاب

تکانه و اندازه حرکت

برخورد

- اصل تکانه و اندازه حرکت
- اندازه حرکت خطی
- اندازه حرکت زاویه ای
- دوران حول محور خارج از مرکز جرم

- برخورد غیر مرکزی