



www.DastyarKhoob.ir

DastyarKhoob

جزوه درس:

مقاومت مصالح 2

For more courses visit:

www.DastyarKhoob.ir

با استفاده از جزوات اسکن شده، به محیط زیست کمک کنیم...

هر آنچه که در این جزوه می خوانید حاصل زحمات دانشجویان دانشگاه صنعتی شریف می باشد که دانسته های خود از حضور در کلاس استاد محترم، دکتر اصغری را مکتوب کرده اند.
استفاده از این جزوات برای تمامی دانشجویان کاملاً رایگان می باشد.

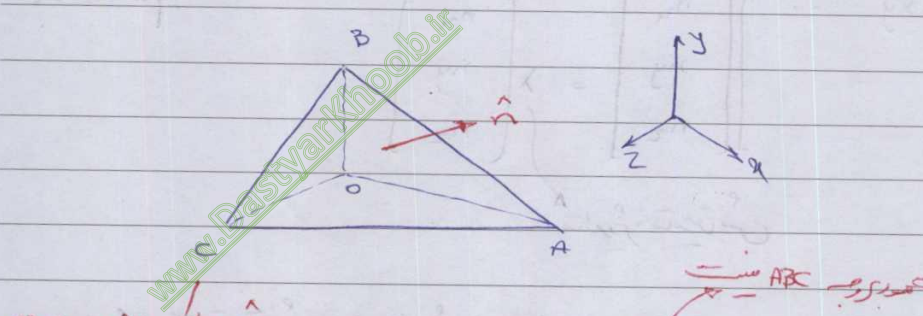


www.DastyarKhoob.ir

DastyarKhoob

Year:..... Month:..... Day:.....

Subject:.....



ABC : $\vec{F}_{ABC} = S_{ABC} \begin{bmatrix} \delta x n \\ \delta y n \\ \delta z n \end{bmatrix}$

$$ABC : \vec{F}_{ABC} = S_{ABC} \begin{bmatrix} \delta x n \\ \delta y n \\ \delta z n \end{bmatrix}$$

$$OBC : \delta x n S_{OBC} = \delta x n (S_{ABC} n_x)$$

$$OAC : \tau_{xy} S_{OAC} = \tau_{xy} (S_{ABC} n_y)$$

$$OAB : \tau_{xz} S_{OAB} = \tau_{xz} (S_{ABC} n_z)$$

$$\vec{n} = \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \delta x n S_{ABC} = \delta x n S_{ABC} n_x + \tau_{xy} S_{ABC} n_y + \tau_{xz} S_{ABC} n_z$$

$$\Rightarrow \delta x n = \delta x n n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z$$

$$\begin{bmatrix} \delta x n \\ \delta y n \\ \delta z n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \delta y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \delta z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix}$$

ماتریس تنش

CACTUS

①



www.DastyarKhoob.ir

DastyarKhoob

Year: Month: Day:

Subject:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix}$$

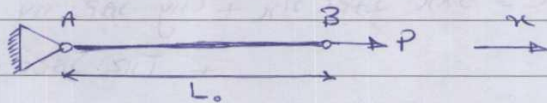
ماتریس تنش = مقدار تنش اصلی

$$\sigma_n = \hat{n} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \hat{n}$$

$$\tau_n = \sqrt{\left| \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \end{bmatrix} \right|^2 - \sigma_n^2}$$

refer to the pirate
copies.
* انرژی تنش الاستیک :

elastik (تنش)



$$dW = P dx_B$$

انرژی تنش ذخیره شده در الاستیک

$$dU = dW$$

مقدار تنش در

$$U = W = \int_{x_B=0}^{x_B=L} P dx_B$$

CACTUS

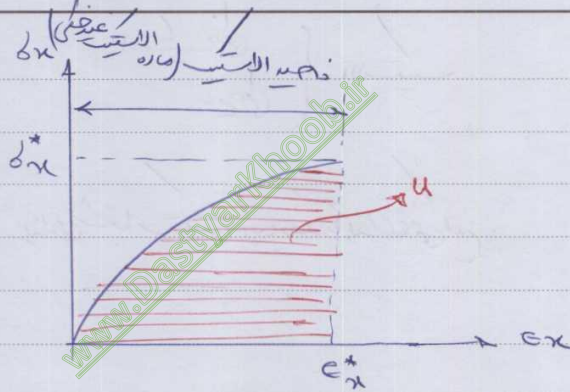


www.DastyarKhoob.ir

DastyarKhoob

Subject: _____

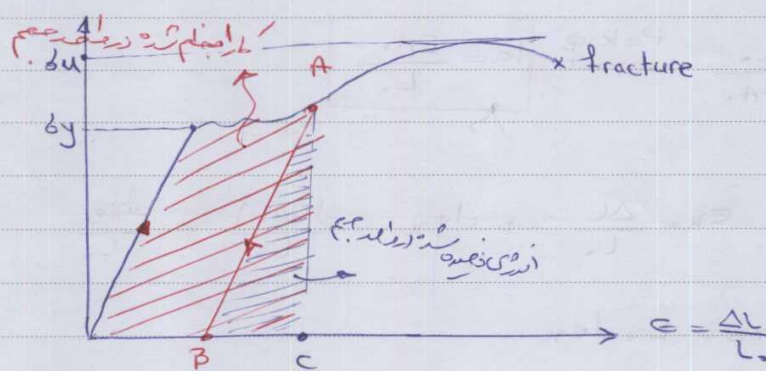
Year. _____ Month. _____ Date. () _____



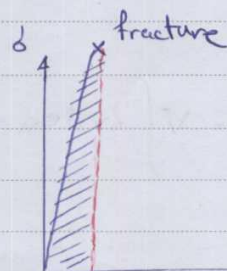
1.1/ $\sigma = E \epsilon \rightarrow U = \int \sigma d\epsilon = \int_0^{\epsilon^*} E \epsilon d\epsilon$

$$\Rightarrow U = \frac{1}{2} E \epsilon^{*2} = \frac{1}{2} \frac{\sigma^{*2}}{E} = \frac{1}{2} \sigma^* \epsilon^*$$

$$\sigma = P/A_0$$



$$\text{area } U = \int \sigma d\epsilon$$



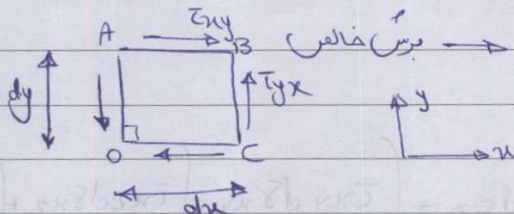


www.DastyarKhoob.ir

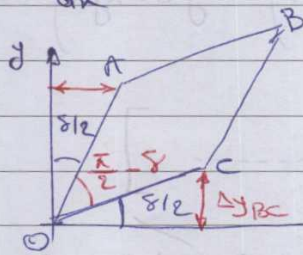
DastyarKhoob

Year:..... Month:..... Day:.....

Subject:.....



منقول این نسبت در تنش نرمال داریم از جرم این عناصر
تنش نرمال هم داریم



$$\Delta y_{BC} = dx \tan \frac{\delta}{2} \approx dx \frac{\delta}{2}$$

$$W_{BC} = \frac{1}{2} F_{BC} \Delta y_{BC}$$

* جافض الاستیک خلی بودن

$$W_{AB} = \frac{1}{2} (\tau_{yx} dy dz) (dx \frac{\delta}{2}) = \frac{1}{2} (\tau_{yx} \frac{\delta}{2}) (dx dy dz)$$

$$W_{AB} = \frac{1}{2} (\tau_{xy} \frac{\delta}{2}) dV$$

* جابجایی افقی نقاط OC و جابجایی قائم ذرات OA در نظر نیاید
در نظر نیاید

فرض بر الاستیک خلی بودن است پس تمام جابجایی
شده در همان به صورت انرژی در آن ذخیره می شود

$$U = W_{AB} + W_{BC} = \frac{1}{2} \left[\tau_{xy} \frac{\delta}{2} + \tau_{yx} \frac{\delta}{2} \right] dV$$

$$\Rightarrow u = \frac{U}{dV} = \frac{1}{2} \left[\tau_{xy} + \tau_{yx} \right] \frac{\delta}{2} = \frac{1}{2} \tau_{xy} \delta$$

$$U = \int \tau_{xy} d\delta$$

CACTUS

(۳)



www.DastyarKhoob.ir

DastyarKhoob

Year:..... Month:..... Day:.....

Subject:.....

→ در حالتی که تنش‌های نرمال هم بر یک‌ای وارد شود
(در حالت 3 برابری)

$$u = \int b_x dx + \int b_y dy + \int b_z dz + \int \tau_{xy} d\delta_{xy} + \int \tau_{xz} d\delta_{xz} + \int \tau_{yz} d\delta_{yz}$$

در صورتی که تنش‌ها فقط در یک جهت وارد می‌شود

$$w_i = - \left[\int b_x dx + \dots \right]$$

برای این که $u = w_f$ باشد باید صاف باشد $w_c = -w_f$

در حالت الاستیک

$$u = \frac{1}{2} (b_x \epsilon_x + b_y \epsilon_y + b_z \epsilon_z + \tau_{xy} \delta_{xy} + \tau_{xz} \delta_{xz} + \tau_{yz} \delta_{yz})$$

در صورتی که تنش‌ها فقط در یک جهت وارد می‌شود	$\epsilon_x = \frac{1}{E} (b_x - \nu(b_y + b_z))$	$\delta_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$
	$\epsilon_y = \frac{1}{E} (b_y - \nu(b_x + b_z))$	$\delta_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}$
	$\epsilon_z = \dots$	$\delta_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$

$$u = \frac{1}{2E} (b_x^2 + b_y^2 + b_z^2 - 2\nu(b_x b_y + b_y b_z + b_z b_x))$$

$$+ \frac{1}{2G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)$$

* چنانچه u و w را با هم مقایسه کنیم می‌توانیم ببینیم که در صورتی که تنش‌ها فقط در یک جهت وارد می‌شود (در حالت الاستیک)

قد هم در آن جهت وارد می‌شود (در حالت الاستیک)

CACTUS



www.DastyarKhoob.ir

DastyarKhoob

Year:..... Month:..... Day:.....

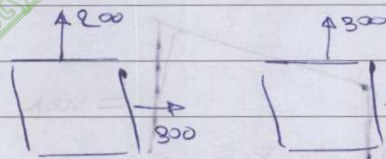
Subject:.....

$a \ b \ c$

درجه اول آن قدر توان می دهیم تا به حالت اصلی برسیم

$$U = \frac{1}{2E} [a^2 + b^2 + c^2 - 2\gamma (ab + bc + ca)]$$

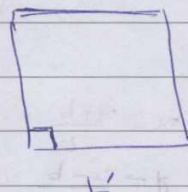
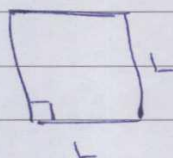
symmetric function



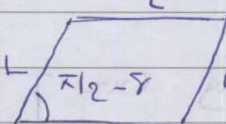
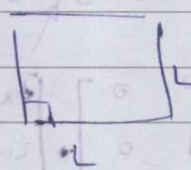
اینست که در این دو شکل (درست آن ها را تعریف می کنند)

distortion.

تغییر حجم خالص (یعنی تغییر از هر من به من در یک واحد) + انحراف (یعنی تغییر حجم) = تغییر حجم



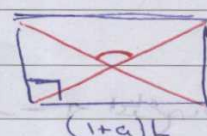
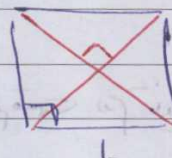
تغییر حجم خالص



انحراف

$$A = L^2$$

$$A = L^2 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) = L^2 \cos \gamma = L^2 \left(1 - \frac{\gamma^2}{2}\right) \approx L^2$$



انحراف

$$A = (1-a^2)L^2 \approx L^2$$

CACTUS

①



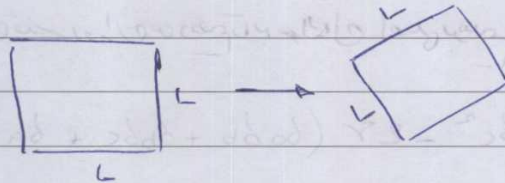
www.DastyarKhoob.ir

DastyarKhoob

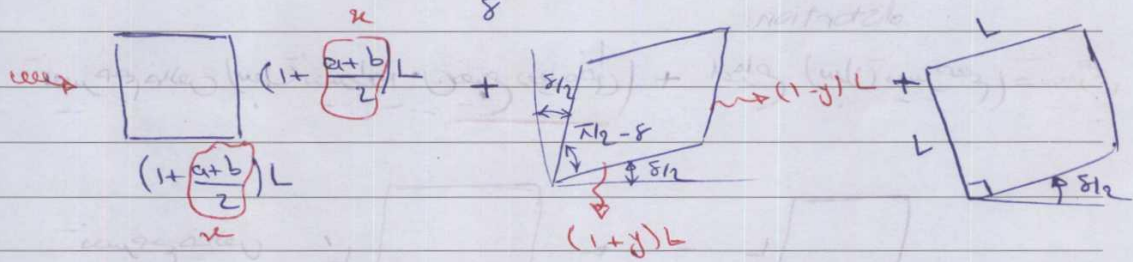
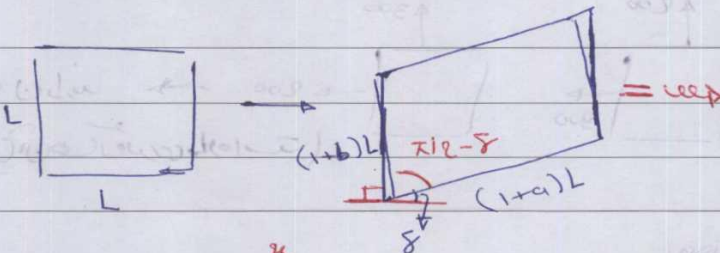
TA/ 12-1 5/5 (211)

Year: Month: Day:

Subject:



دولت علی (عج) نوشتن
نکته: این تغییر وضعیت است.



$$\begin{cases} x-y=b \\ x+y=a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{a+b}{2} \\ y=\frac{a-b}{2} \end{cases}$$

متغیرهای انحراف

$$\begin{bmatrix} \delta x & \delta y & \delta z \\ \delta y & \delta y & \delta y \\ \delta x & \delta y & \delta z \end{bmatrix} = \delta \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta x & \delta y & \delta z \\ \delta y & \delta y & \delta y \\ \delta x & \delta y & \delta z \end{bmatrix}$$

$$\delta = \frac{\delta x + \delta y + \delta z}{3}$$

تغییر حجم (متوسط تغییرات)

**

* آنگاه درجه تغییرات در تغییرات آنها را می‌توان به این صورت نوشت:

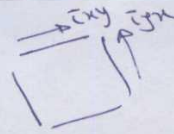
$$e = \frac{\Delta V}{V_0} = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = \frac{1-\nu}{E} (\delta x + \delta y + \delta z)$$

CACTUS

$$\Delta V = 0 \Rightarrow \delta x + \delta y + \delta z = 0$$



در این باب می‌خواهیم تغییرات حجمی و تغییرات طولی را بررسی کنیم



در این باب می‌خواهیم تغییرات حجمی و تغییرات طولی را بررسی کنیم

Year: Month: Day:

Subject:

$$\delta'x + \delta'y + \delta'z = \delta x + \delta y + \delta z - 3\delta = 0$$

پس تغییرات طولی $u = u_v + u_d$
 volumetric distortion

$$u_v = \frac{1}{2E} [3\delta^2 - 2\nu(3\delta)] = \frac{3(1-2\nu)\delta^2}{2E}$$

$$\Rightarrow u_v = \frac{1-2\nu}{6E} (\delta x + \delta y + \delta z)^2$$

$$u_d = \frac{1}{6E} [3(\delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2) - 6\nu(\delta x\delta y + \delta x\delta z + \delta y\delta z) - (1-2\nu)(\delta x + \delta y + \delta z)^2] + \frac{1}{2G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)$$

$$= \frac{1+\nu}{6E} [(\delta x - \delta y)^2 + (\delta x - \delta z)^2 + (\delta y - \delta z)^2] + \frac{1}{2G} (\dots)$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \Rightarrow u_d = \frac{1}{12G} [(\delta x - \delta y)^2 + (\delta x - \delta z)^2 + (\delta y - \delta z)^2] + \frac{1}{2G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)$$

پس تغییرات طولی: $u_v = \frac{1-2\nu}{6E} (\delta a + \delta b + \delta c)^2$

$$u_d = \frac{1}{12G} [(\delta a - \delta b)^2 + (\delta a - \delta c)^2 + (\delta b - \delta c)^2]$$



www.DastyarKhoob.ir

DastyarKhoob

Year:..... Month:..... Day:.....

Subject:.....

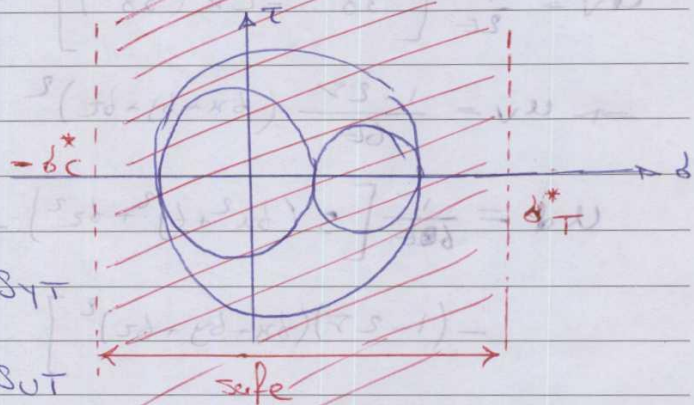
* معیارهای تسلیم و شکست:

در ماکزیمم هم تسلیم و هم شکست داریم اما در صورتی که تسلیم داریم

$$\begin{cases} \sigma_{YT} = \sigma_{Yc} \\ \sigma_{XT} = \sigma_{Xc} \end{cases}$$

۱- معیار تنش محوری (معیار Coulomb)

$$\begin{cases} \sigma_{uc} \setminus \sigma_{ut} \\ \sigma_{xc} \setminus \sigma_{xt} \end{cases}$$

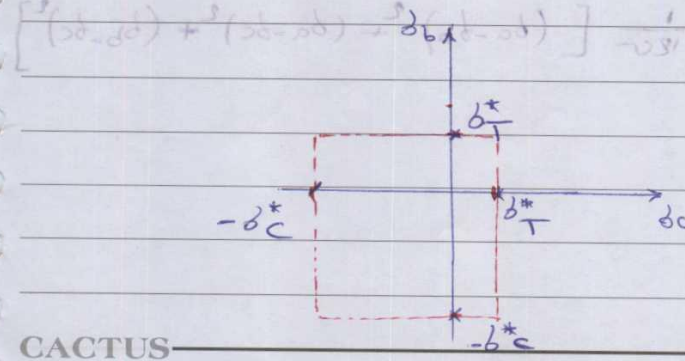


$$\sigma_T^* \begin{cases} \sigma_{YT} = \sigma_{XT} \\ \sigma_{UT} = \sigma_{XT} \end{cases}$$

$$\sigma_c^* \begin{cases} \sigma_{Yc} = \sigma_{Xc} \\ \sigma_{uc} = \sigma_{xc} \end{cases}$$

در معیار Coulomb معیار تنش برشی مهم نیست. معیار این از بالا و پایین قاعده از مرکز را

$$\sigma_a, \sigma_b, \sigma_c = 0 \quad \sigma_c = \tau_{zx} = \tau_{xy} = 0 \quad \text{در تنش منفعش}$$



صافه تدریج $\sigma_c^* \setminus \sigma_T^*$

CACTUS



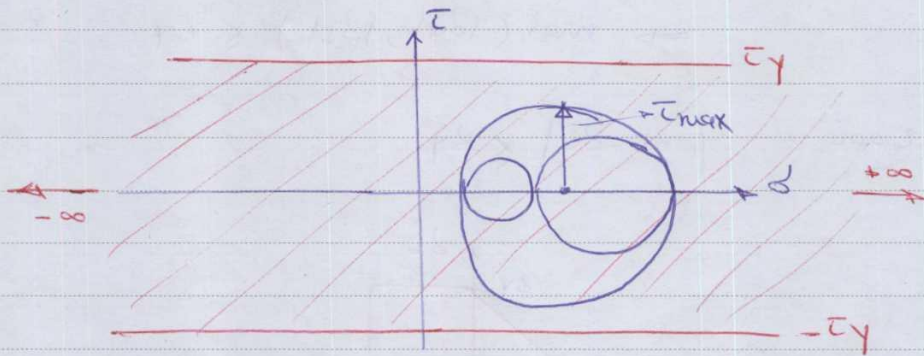
www.Dastyarkhoob.ir

Dastyarkhoob

Subject: _____

Year: _____ Month: _____ Date: _____ ()

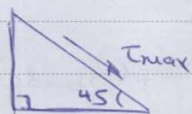
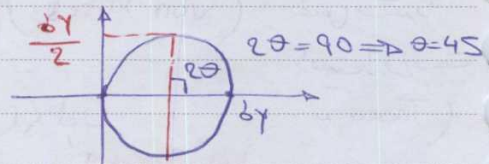
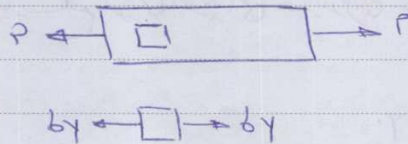
2- معیار تنش بیشینه (مبارزه داکتیل) : Tresca. معیار *



$$\tau_{max} < \tau_y = S_{sy}$$

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2}$$

* تنش بیشینه تنش برشی است که در صورتی که تنش برشی به مقدار تنش برشی تسلیم برسد، تغییر شکل پلاستیک در جهت تنش برشی رخ می‌دهد.



$$\tau_{max} = \frac{\sigma_y}{2} \quad \left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow \tau_y = \frac{\sigma_y}{2} \\ \tau_{max} = \tau_y \end{array} \right.$$

$$\sigma_c = \sigma_z = \sigma_{xy} = \sigma_{yz} = 0$$

$$\tau_{max} = \begin{cases} \frac{\max(|\sigma_a|, |\sigma_b|)}{2} ; \sigma_a \sigma_b < 0 \\ \frac{|\sigma_b - \sigma_a|}{2} ; \sigma_a \sigma_b > 0 \end{cases}$$

PAPCO

(4)



www.DastyarKhoob.ir

DastyarKhoob

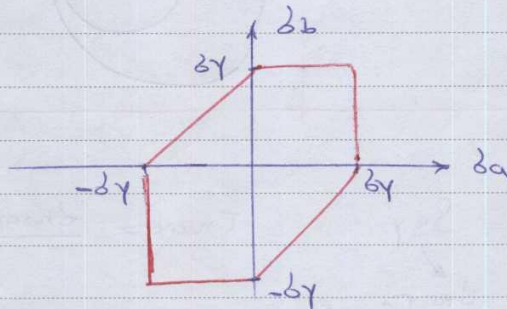
Subject: _____

Year. _____ Month. _____ Date. _____ ()

3-میزان: $\tau_{max} = \frac{\max(|\delta a|, |\delta b|)}{2} \leq \bar{\tau}_y = \frac{\delta_y}{2}$

$\Rightarrow \max(|\delta a|, |\delta b|) \leq \delta_y$

4-میزان: $|\delta b - \delta a| \leq \delta_y$



3- معیار تنش انحرافی حداکثری (von Mises) (تعیین می‌شود)

واقعیت دارد است

(Tresca)

$U_d < (U_d)_y$

distortion

$U_d = \frac{1}{120} \left[(\delta a - \delta b)^2 + (\delta a - \delta c)^2 + (\delta b - \delta c)^2 \right]$

در صورتی که تنش در یک نقطه از یک جسم در یک لحظه مشخص

$\Rightarrow \begin{cases} \delta a = \delta_y \\ \delta b = \delta c = 0 \end{cases}$

$(U_d)_y = \frac{1}{60} \delta_y^2$

$U_d < (U_d)_y \Rightarrow \left[(\delta a - \delta b)^2 + (\delta b - \delta c)^2 + (\delta a - \delta c)^2 \right] < 2 \delta_y^2$



Subject: _____

Year. _____ Month. _____ Date. _____

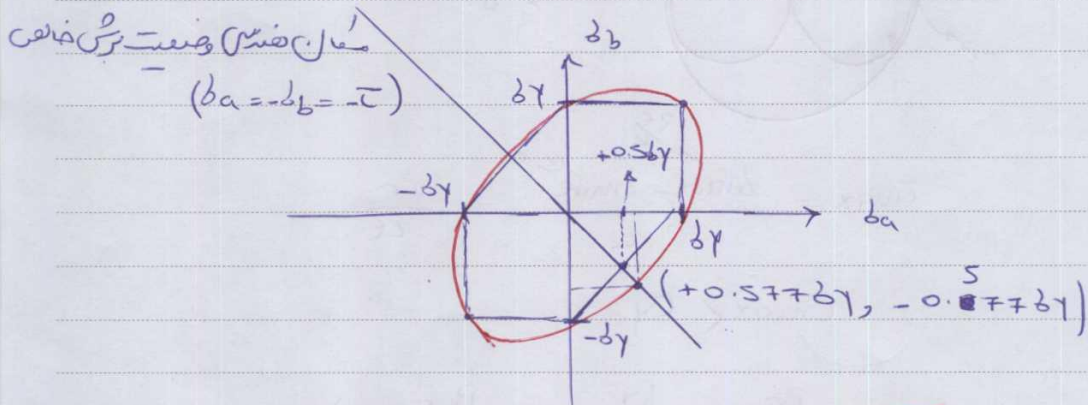
وضعیت برش خالص: $\tau_{xy} = \tau$ و $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sigma_a = -\tau \\ \sigma_b = \tau \\ \sigma_c = 0 \end{cases}$

رابطه تسلیم: $[(\sigma_a - \sigma_b)^2 + \sigma_b^2 + (\sigma_b - \sigma_c)^2] = 2\sigma_y^2$

$\Rightarrow \sigma_{\tau}^2 = 2\sigma_y^2 \Rightarrow \tau = \frac{\sigma_y}{\sqrt{3}} = 0.577\sigma_y$

von Mises, Tresca: $\tau = \frac{\sigma_y}{2} = 0.5\sigma_y$

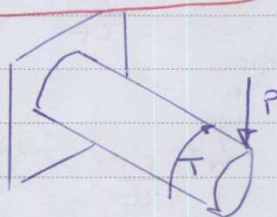
$\sigma_c = 0 \Rightarrow \sigma_a^2 - \sigma_a\sigma_b + \sigma_b^2 < \sigma_y^2$ I



درجه اول تنش

درجه اول تنش و تنش برش

$\begin{cases} \sigma_x \\ \tau_{xy} \end{cases}$



$\begin{cases} \sigma_b = \frac{\sigma_x}{2} + \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{4} + \tau_{xy}^2} \\ \sigma_a = \frac{\sigma_x}{2} - \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{4} + \tau_{xy}^2} \end{cases} \xrightarrow{I} \sigma_x^2 + 3\tau_{xy}^2 < \sigma_y^2$



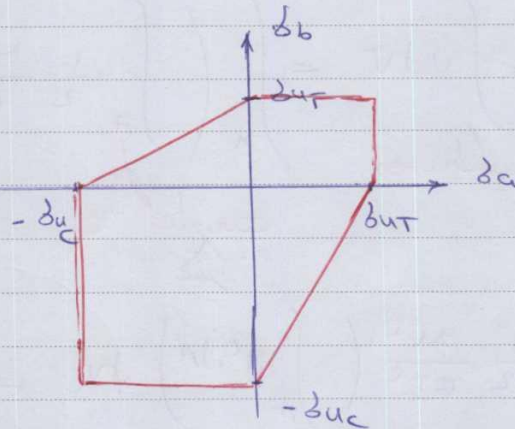
www.DastyarKhoob.ir

DastyarKhoob

Subject :

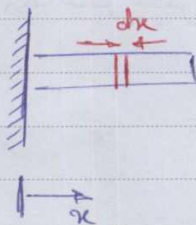
Year . Month . Date . ()

4- معیار سخت کولومب - موهر (موهر) برای موارد زیر: برای مواردی که هم توان یکبار بر اثر اجزای
در آن ها هم سخت و هم در برابر
است با جمع زیاد بر واقعیت نزدیک است



مکانیسم تغییر شکل

$$U = \frac{1}{2} \delta u \epsilon x = \frac{1}{2} \frac{P}{A} \left(\frac{P}{EA} \right) = \frac{1}{2} \frac{P^2}{EA^2}$$



$$U_{\text{مید}} = \int U dV = \int \frac{P^2(x)}{2 A(x) E(x)} dx$$

در هر سطح مقطع نیروی کشش یا فشار $A(x) dx$ است.

* در حالت خاص:



معمولا در محاسبه $\delta x = -\frac{My}{I}$

PAPCO



www.DastyarKhoob.ir

DastyarKhoob

Subject:

Year. Month. Date. ()

$$U = \frac{1}{2} \delta x \epsilon x = \frac{1}{2} \frac{\delta x^2}{\epsilon} \quad , \quad \delta x = \frac{-\mu y}{I}$$

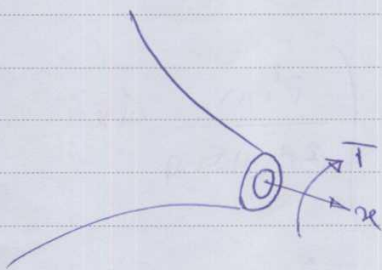
$$U_M = \int U dV = \int_x \left(\int_A \frac{1}{2} \frac{\mu^2 y^2}{\epsilon I^2} dA \right) dx$$

رابطه بین تغییرات طول و نیرو

مساحت مقطع
عنه

$$= \int_x \frac{1}{2} \frac{\mu^2}{\epsilon I^2} \left(\int_A y^2 dA \right) dx = \frac{1}{2} \int \frac{\mu^2(x)}{\epsilon(x) I(x)} dx$$

* در صورت لزوم:



$$U = \frac{1}{2} T \delta = \frac{1}{2} \frac{T^2}{\sigma}$$

$$T = \frac{I r}{\delta}$$

$$U_T = \int U dV = \int_x \int_A \frac{T^2 r^2}{2 \sigma \delta^2} dA dx$$

$$\Rightarrow U_T = \int_x \frac{T^2}{2 \sigma \delta^2} \left(\int_A r^2 dA \right) dx = \frac{1}{2} \int \frac{T^2(x)}{\sigma(x) \delta(x)} dx$$



Subject:

Year: Month: Date: ()



$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

برای سب $\vec{r}_1 = \vec{r}_2 = \vec{r}_3$ جهت اصلی است.

برای سب و متولد هار در حال و بر روی آن در یک صنف

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}} (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$$

$$\vec{\delta}_n = \delta \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\vec{\delta}_n = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$|\delta_{nn}| = \delta_n \cdot n = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} = 7/3$$

$$\vec{\delta}_{nn} = |\delta_{nn}| \vec{n} = \frac{7}{3\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

PAPCO

①

$$\vec{c}_n = \vec{\delta}_n - \vec{\delta}_{nn} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 2/3 \\ -7/3 \\ 5/3 \end{pmatrix}$$



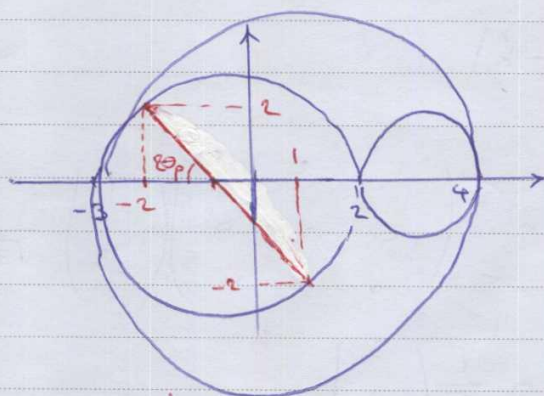
Subject: _____

Year: _____ Month: _____ Date: _____ ()

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & -2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(\lambda^2 + \lambda - 6) = 0$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda = -3 \\ \lambda = 2 \\ \lambda = 4 \end{cases} \quad \text{نشان داده شد}$$

$$\lambda = -3 \Rightarrow (I - (-3)I) X_1 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \tilde{X}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{نشان داده شد}$$



$$2\theta_p = \tan^{-1}\left(\frac{2}{1.5}\right)$$

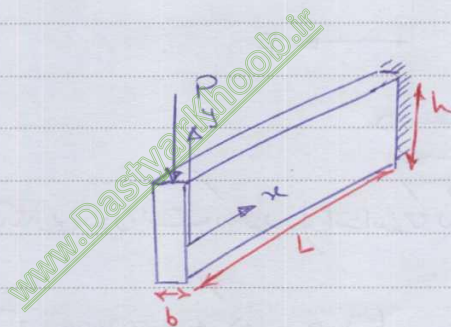


www.DastyarKhoob.ir

DastyarKhoob

Subject:

Year: Month: Date: ()



$$U_V = \int u_\tau dV \quad u_\tau = \frac{\tau^2}{2G}$$

$$\tau = \frac{3}{2} \frac{P}{bh} \left(1 - \frac{y^2}{(h/2)^2} \right)$$

$$U_V = \frac{1}{2G} \left(\frac{3P}{2bh} \right)^2 \int_{-h/2}^{h/2} \left(1 - \frac{4y^2}{h^2} \right)^2 b dy dx = \frac{3P^2 L}{50bh}$$

$$U_M = \int \frac{M^2}{2EI} dx = \int_0^L \frac{(Px)^2}{2EI} dx = \frac{P^2 L^3}{6EI}$$

$\frac{1}{12} bh^3$

$$U = U_M + U_V = U_M \left(1 + \frac{3EIh^2}{10GL^2} \right)$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} ; -1 < \nu < 1/2$$

$$\frac{E}{G} = 2(1+\nu) \quad \text{MAX} \left(\frac{E}{G} \right) = 2(1+\nu_{max}) = 3$$

$$P4PCO \Rightarrow \frac{E}{G} \leq 3 \quad \frac{3EIh^2}{10GL^2} \leq 0.9 \left(\frac{h}{L} \right)^2$$

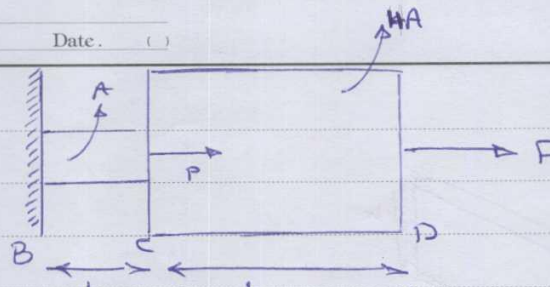
(1)

انرژی ناشی از برش قابل صرف نظر در مقابل انرژی ناشی از کشش می باشد



Subject:

Year. Month. Date. ()



مثال ۱:

از جمع انرژی توان استفاده کرد. (ابتداءً درستی فرضی از: F و سپس از انرژی درستی فرضی P)

داریم: δ_1 : BC در F - شش فرضی از: F و δ_2 : " " P " " (i.e. کنیم)

$$U = \frac{\delta^2}{2E} \quad U = \frac{(\delta_1 + \delta_2)^2}{2E} = \frac{\delta_1^2}{2E} + \frac{\delta_2^2}{2E} + \frac{2\delta_1\delta_2}{2E}$$

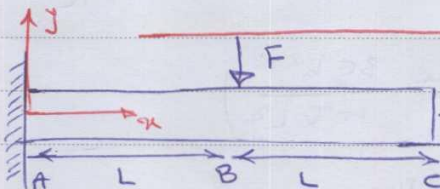
ن نسبت به δ_1 و δ_2 مشتق می‌گیریم و آنرا برابر صفر می‌گذاریم و از آنجا که $\delta_1 = \delta_2$ داریم:

$$U_{BC} = \frac{(F+P)^2}{2EA^2}$$

حرکت نمی‌شود.

$$U_{CD} = \frac{F^2}{2E(4A)^2}$$

$$U = U_{BC}(AL) + U_{CD}(4AL) = \frac{(F+P)^2 L}{2EA} + \frac{1}{2} \frac{F^2 L}{4EA}$$



مثال ۲:

در این مثال می‌توان از روش جمع انرژی استفاده کرد.

که در مثال ۱ انرژی از نیروی P یا F و در مثال ۲ انرژی از نیروی A و B

چون می‌تواند از روش انرژی استفاده کرد و از آنجا که در این مثال انرژی از نیروی A و B



Subject: _____

Year. _____ Month. _____ Date. _____ ()

$$(b_1 + b_2)^2 = b_1^2 + b_2^2 + 2b_1b_2$$

$\swarrow$ $\searrow$
 فاسی از F فاسی از P

یون جمع آبی اندرین روشی
 برای یک نقطه از جسم ✓ نمی باشد
 اما وقتی در یک سطح انتشار می دهیم ✓ می شود.

$$U = \frac{1}{2E} \int_A (b_1 + b_2)^2 dA$$

$$= \frac{1}{2E} \int_A \left(b_1^2 + b_2^2 + \frac{2F(L-x)}{I} \frac{P}{A} \right) dA$$

$$= \frac{1}{2E} \int_A (b_1^2 + b_2^2) dA + \frac{F(L-x)P}{2EIA} \int_A dA$$

$\int_A dA = A$

$L = 2m$ $E = 200 \text{ GPa}$ مثال 3
 $d = 2cm$

ن = 80 اندرین
 جابجایی المان 3 و حدتیم لازم برای جدایی از تغییر شکل پلاستیک

$$U = U_V = \frac{\pi}{2} \delta^2 \times 10^{-15}$$

δ^2 $\swarrow$ $\searrow$ AL
 $\frac{\pi}{2E}$

$[U \rightarrow 3U]$ ← در درج 3 برابر شود

$$\frac{\pi}{2} \delta \gamma^2 \times 10^{-15} = 3 \times 80 \Rightarrow \delta \gamma = 390 \times 10^9 \text{ kPa}$$

$$\frac{\pi}{2} \left(\frac{\delta \gamma}{3} \right)^2 \times 10^{-15} = 80 \quad \times \quad \text{بعد}$$

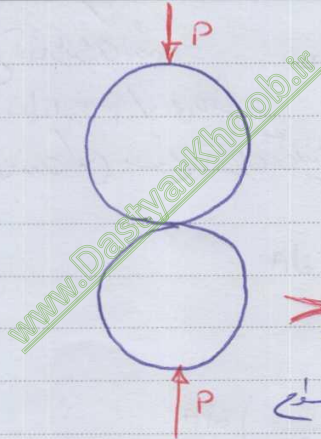


www.DastyarKhoob.ir

DastyarKhoob

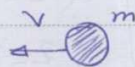
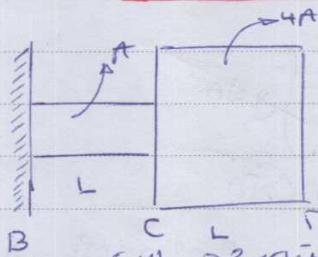
Subject:

Year: Month: Date: ()



س - ∞ → سطح تماس بی انتها

اما سطح تماس تفسیرش می دهد.
↓
سطح تماس = سطح



مثال 4: $\delta_{max} = ?$

$$\begin{cases} |\delta| = E \sqrt{1/E} \\ \delta \in \gamma_0 \end{cases}$$

در مقدار که SYS مستقر شود این روش کارایی پیدا می کند و در این لحظه بیشترین نیرو وارد می شود.

نیروی لغزش در SYS F

$$\delta_{CD} = \frac{F}{4A}, \quad \delta_{BC} = \frac{F}{A}$$

$$U_{BC} = (AL) \int \delta dE = AL \int E \sqrt{E} dE = AL \frac{2}{3} \sqrt{E^3} \Big|_{E=0}^{E=\delta_{BC}}$$

$$= AL \frac{2}{3} E \left(\frac{\delta_{BC}}{E} \right)^3 = \frac{2}{3} \frac{F^3 L}{E^2 A^2}$$

$$U_{CD} = (4AL) \int \delta dE = \frac{2}{3 \times 16} \frac{F^3 L}{E^2 A^2}$$

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{2}{3} \frac{F^3 L}{E^2 A^2} \times \frac{17}{16} \Rightarrow F = \sqrt[3]{\frac{12}{17} \frac{m v^2 E^2 A^2}{L}}$$

PAPCO

$$\delta_{max} = \delta_{BC} = \frac{F}{A} = \sqrt[3]{\frac{12}{17} \frac{m v^2 E^2}{L A}}$$



www.DastyarKhoob.ir

DastyarKhoob

$$\delta = \frac{FL}{AE} \Rightarrow k = \frac{F}{\delta} = \frac{EA}{L}$$

Subject:

Year: Month: Date: ()

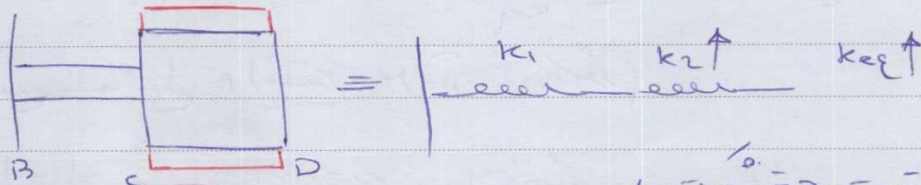
$$\delta = \epsilon \epsilon$$

اگر ابتدا من و در من خطی بود میله ای افقی بود پس در من

$$k_1 = \frac{EA}{L} \quad k_2 = \frac{4EA}{L} \quad \Rightarrow \quad \frac{4}{5} \frac{EA}{L}$$

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \frac{F^2}{k_{eq}} \Rightarrow F = \sqrt{\frac{4}{5} \frac{EA}{L} m v^2}$$

$$\delta_{max} = \frac{F}{A} = \sqrt{\frac{4}{5} \frac{m v^2 \epsilon}{AL}}$$



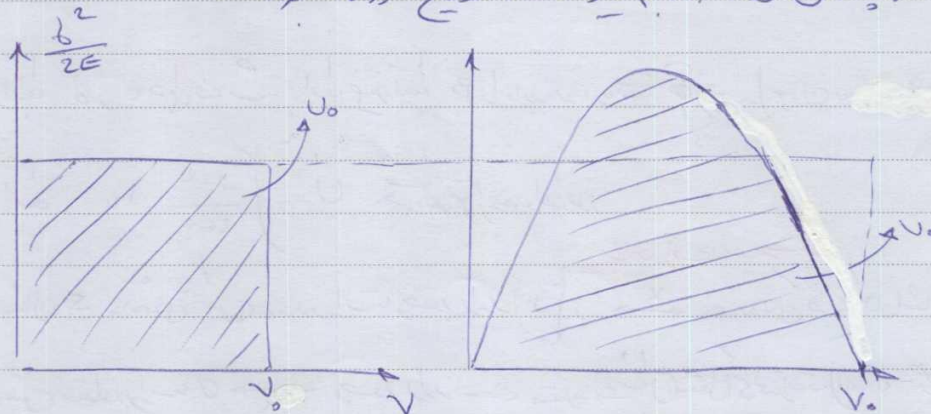
$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \frac{F^2}{k_{eq}}$$

به نسبت دایره من قدری دارد
در حال تا قدری در درون
آن توزیع من غیر یکنواخت قرار دارد

$$\delta_{max} = \frac{F}{A}$$

$$\delta_{max} = \frac{F}{A} \rightarrow ABC$$

در من و در من به هم یکنواخت تر توزیع شود، به عبارت



PAPCO



www.Dastyarkhoob.ir

Dastyarkhoob

Subject:

Year. Month. Date. ()

quiz - تشریح و تفسیر مسائل

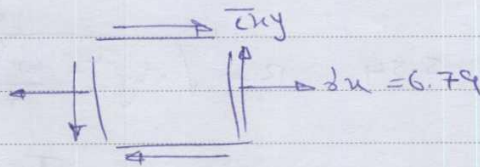


$$\delta u = \frac{P}{A} = \frac{12}{\frac{\pi^2}{4} 12^2} = 6.79$$

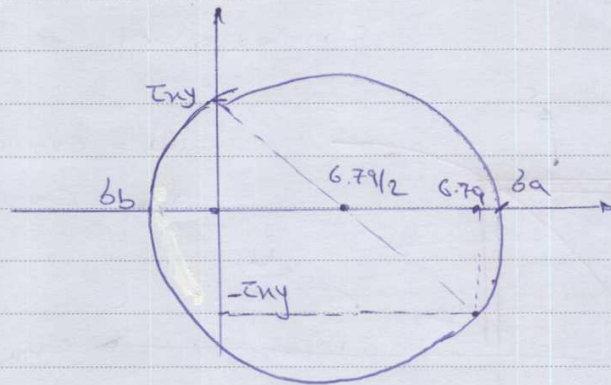
$$\delta u_T = 10$$

$$\delta u_C = 20$$

$$T_{max} = ?$$



$$\delta_{ave} = \frac{0 + 6.79}{2} = \frac{6.79}{2}$$



$$\sigma_a = \sigma_{ave} + R = 3.395 + R$$

$$\sigma_b = \sigma_{ave} - R = 3.395 - R$$

P4PCO

(11)

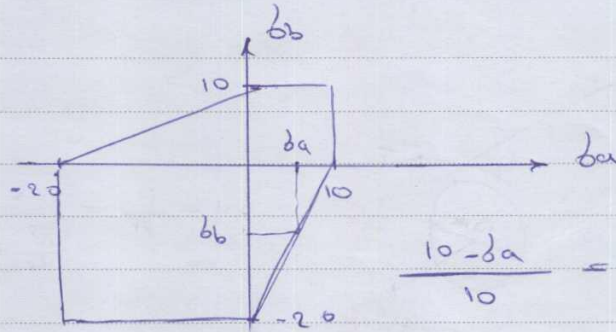


www.DastyarKhoob.ir

DastyarKhoob

Subject: _____

Year: _____ Month: _____ Date: _____



$$\frac{10 - da}{10} = \frac{db}{-20}$$

$$\Rightarrow \frac{10 - (3.395 + R)}{10} = \frac{3.395 - R}{-20}$$

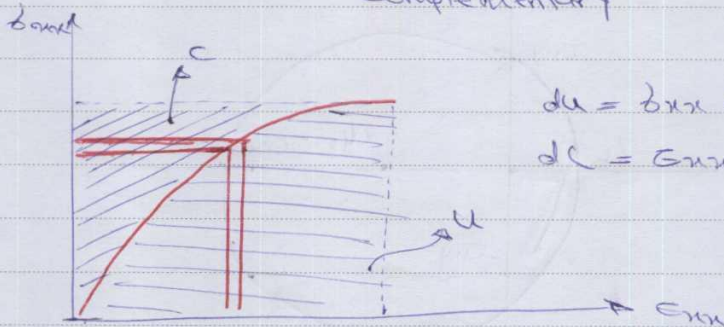
$$\Rightarrow R = 5.54 \quad R = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \frac{6x^2}{4}}$$

$$\tau_{xy} = \dots \Rightarrow \tau = \frac{F_c}{J}$$

مقدار انرژی در یک واحد حجم = c

مقدار انرژی در یک واحد حجم = c

Complementary



$$du = \sigma_{xx} d\epsilon_{xx}$$

$$dc = \epsilon_{xx} d\sigma_{xx}$$

$$du = \sigma_{xx} d\epsilon_{xx} + \sigma_{yy} d\epsilon_{yy} + \sigma_{zz} d\epsilon_{zz} + \tau_{xy} d\delta_{xy} + \tau_{xz} d\delta_{xz} + \tau_{yz} d\delta_{yz}$$

$$dc = \epsilon_{xx} d\sigma_{xx} + \epsilon_{yy} d\sigma_{yy} + \epsilon_{zz} d\sigma_{zz} + \delta_{xy} d\tau_{xy} + \delta_{xz} d\tau_{xz} + \delta_{yz} d\tau_{yz}$$

$$C = \int c dV$$

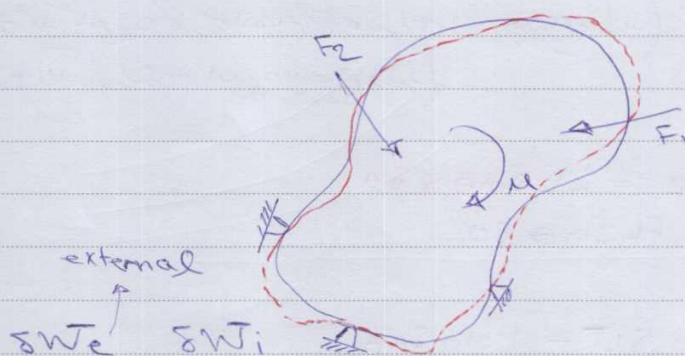
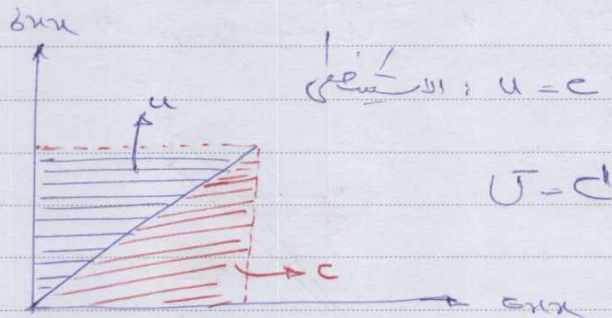


www.Dastyarkhoob.ir

Dastyarkhoob

Subject:

Year: Month: Date: ()



* جهت جابجایی
(در راستای نیرو)

$$W_i = - \left(\int \delta u_x dx + \int \delta y dy + \dots + \int \delta z dz \right)$$

internal

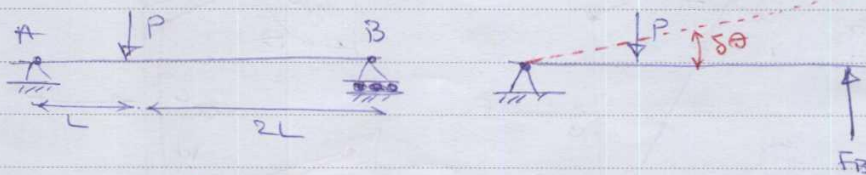
شرط تعادل است $\rightarrow \delta W_e + \delta W_i = 0$

$$\delta W_e - \delta U_i = 0$$

$$\delta (W_e - U_i) = 0$$

در سیستم الاستیک $W_i = -U_i$

مثال:



PAPCO

$$\delta W_e - \delta U_i = 0 \rightarrow \delta W_e = 0 \quad \delta W_e = F_B(3L\delta\theta) - P(L\delta\theta) = 0$$

از شرط تعادل داریم $F_B = P/3$



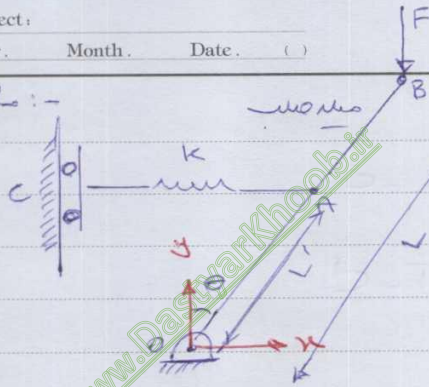
www.DastyarKhoob.ir

DastyarKhoob

Subject:

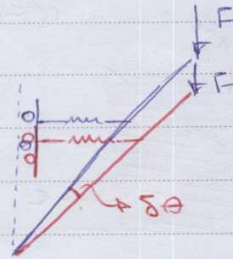
Year: Month: Date: ()

جهت :-



در حالت $\theta = 0$ فنر در وضعیت آزاد است

$\theta = ?$ قابل



نیروی کشش فنر δx_A و نیروی افقی در سمت راست (چون جابجایی ندارد) نیروی افقی در سمت چپ (چون در راستای افقی جابجایی ندارد)

$$y_B = L \cos \theta \Rightarrow \delta y_B = -L \sin \theta \times \delta \theta$$

$$\delta W_e = -F \delta y_B = FL \sin \theta \delta \theta$$

$$U = \frac{1}{2} k x_A^2 \Rightarrow \delta U = k x_A \delta x_A$$

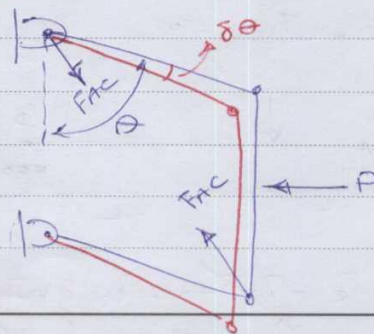
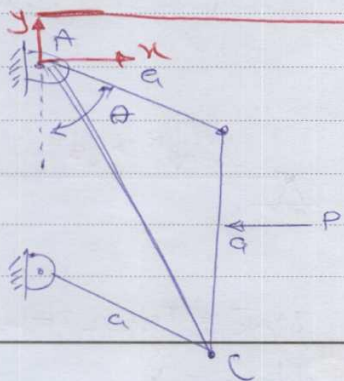
$$x_A = L' \sin \theta \Rightarrow \delta x_A = L' \cos \theta \delta \theta \Rightarrow \delta U = k L' \sin \theta \cos \theta \delta \theta$$

$$\delta U - \delta W = 0 \Rightarrow \cos \theta = \frac{FL}{k L'^2} \Rightarrow \theta = \cos^{-1} \frac{FL}{k L'^2}$$

$$\left| \frac{FL}{k L'^2} \right| < 1 \leftarrow \theta \text{ قابل}$$

جهت :-

$F_{AC} = ?$



P4PCO



22.01.90 Quiz: energy

Subject:

Year. Month. Date. ()

Castigliano Theorem:

x_i : درجه آزادی نام: جابه جایی تعویضی از سیستم و یک استای خاص بارها را در دستگیر

از هم جدا است و خاص

F_i : بار غرض بار درجه آزادی x_i :

تعیین درجه آزادی x_i (جابه جایی بارها را) میوه بارها را تعویض میور تعویض بارها را

مفروض x_i بارها را و بارها را تعویض میور تعویض بارها را (مفروض x_i بارها را)

یک سیستم تعویض بارها را درجه آزادی بارها را $x_1, x_2, x_3, \dots$

$$U = U(x_1, x_2, \dots)$$

$$\delta U = \sum_i \frac{\partial U}{\partial x_i} \delta x_i$$

$$\delta W_e = \sum_i F_i \delta x_i$$

$$\delta U = \delta W_e = 0 \quad \text{در شرایط تعادل} \quad x_i \rightarrow F_i = \frac{\partial U}{\partial x_i}$$

تعیین بارها را درجه آزادی



Subject: _____

Year: _____ Month: _____ Date: _____ ()

$$U = \int \delta d\epsilon \rightarrow C = \int \epsilon d\delta$$

$$\delta W_e = \sum_i F_i \delta x_i \rightarrow \delta C'_{We} = \sum_i x_i \delta F_i$$

$$C = C(F_1, F_2, \dots) \rightarrow \delta C = \left[\frac{\partial C}{\partial F_i} \delta F_i \right]$$

C را به صورت تابعی از F_i ها می‌توان نوشت.

$$\delta U = \delta W_e \rightarrow \delta C = \delta C'_{We} \Rightarrow \boxed{\alpha_i = \frac{\partial C}{\partial F_i}}$$

Crotti - Engesser theorem

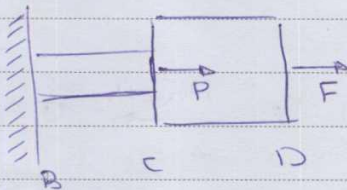
رابطه ریاضی برقرار است در هم‌اکنون

همان = در هر حال با هم برابر است

$U \equiv C \rightarrow$ اگر هم‌اکنون

$$\left| \begin{aligned} F_i &= \frac{\partial U}{\partial x_i} = \frac{\partial C}{\partial x_i} \\ \alpha_i &= \frac{\partial C}{\partial F_i} = \frac{\partial U}{\partial F_i} \end{aligned} \right|$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha_i = \frac{\partial U}{\partial F_i}} \quad \text{تغییر در هم‌اکنون}$$



مقدار تغییر در انرژی را در اثر اعمال بار واحد α_{ij} می‌نامند

میزان تغییر در انرژی

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$$

مستقیم

$$\alpha_i = \sum_m \alpha_{im} F_m$$



www.DastyarKhoob.ir

DastyarKhoob

Subject:

Year: Month: Date: ()

$$U = \frac{1}{2} \sum_i \alpha_i F_i \quad \left. \begin{array}{l} \\ (1) \alpha_i = \sum_m \alpha_{im} F_m \end{array} \right\} \Rightarrow U = \frac{1}{2} \sum_i \sum_m (\alpha_{im} F_m) F_i$$

$$\frac{\partial U}{\partial F_j} = \alpha_j \Rightarrow \frac{1}{2} \sum_i \sum_m \alpha_{im} \frac{\partial F_m}{\partial F_j} F_i + \frac{1}{2} \sum_i \sum_m \alpha_{im} F_m \frac{\partial F_i}{\partial F_j}$$

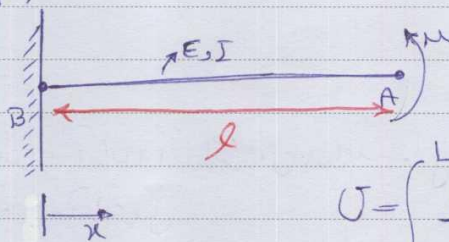
$$\frac{\partial F_m}{\partial F_j} = \begin{cases} +1 & m=j \\ 0 & m \neq j \end{cases} \quad \frac{\partial F_i}{\partial F_j} = \begin{cases} +1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \Rightarrow \alpha_j$$

$$\Rightarrow \alpha_j = \frac{1}{2} \sum_i \alpha_{ij} F_i + \frac{1}{2} \sum_m \alpha_{jm} F_m \quad \left. \begin{array}{l} \\ (1) \alpha_j = \sum_m \alpha_{jm} F_m \end{array} \right\} \Rightarrow \sum_i \alpha_{ij} F_i = \sum_m \alpha_{jm} F_m$$

$$\Rightarrow \sum_i \alpha_{ij} F_i = \sum_i \alpha_{ji} F_i \Rightarrow \alpha_{ij} = \alpha_{ji}$$

reciprocal theorem
Maxwell's Law

Ques 1:



پ. سوال اول را با استفاده از قضیه متقابل اثبات کنید.

$$U = \int_0^L \frac{M^2(x)}{2EI} dx \xrightarrow{M(x)=M} U = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx$$

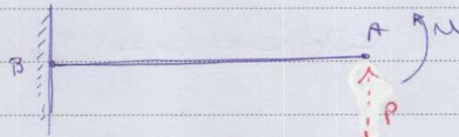
$$\theta_A = \frac{\partial U}{\partial M} = \int_0^L \frac{2M \frac{\partial M}{\partial M}}{2EI} dx = \int_0^L \frac{M}{EI} dx = \frac{ML}{EI}$$



Subject:

Year. Month. Date. ()

مسئله ۲: محاسبه جابجایی A



$$\frac{\partial U}{\partial P} \quad M(x) = \mu + PL - Px$$

$$\delta_A = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{\partial}{\partial P} \int_0^L \frac{M^2(x)}{2EI} dx = \int_0^L \frac{M(x)}{EI} \frac{\partial M(x)}{\partial P} dx$$

معادله انرژی پتانسیل را در اینجا استفاده می‌کنیم و به کمک آن می‌توانیم جواب را پیدا کنیم.

$$= \frac{1}{EI} \int_0^L (\mu + PL - Px)(L - x) dx$$

چون برای یافتن δ_A در اینجا $P=0$ قرار می‌دهیم.

$$P=0 \rightarrow \delta_A = \frac{\mu L^2}{2EI}$$

تغییرات انرژی پتانسیل در برابر تغییرات بار P را می‌توانیم محاسبه کنیم.

* Sup *



$$\theta_A = \frac{\partial}{\partial M} \int_0^L \frac{M^2(x)}{2EI} dx \quad \alpha_{ij} = \alpha_{ji}$$

$$\alpha_{ij} = \text{جابجایی در جهت } i \text{ به دلیل بار } j$$

$$\alpha_{ji} = \text{جابجایی در جهت } j \text{ به دلیل بار } i$$

$$\alpha_{ji} = \frac{\mu L^2}{2EI} / \mu = \frac{L^2}{2EI} = \alpha_{ij}$$

$$\theta_A = P \alpha_{ij} = \frac{PL^2}{2EI}$$



www.DastyarKhoob.ir

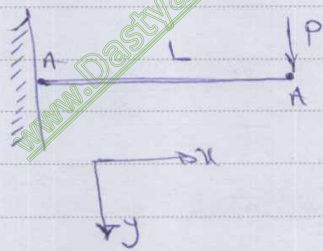
DastyarKhoob

Subject:

Year: Month: Date: ()

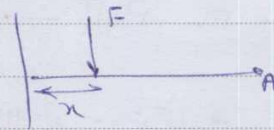
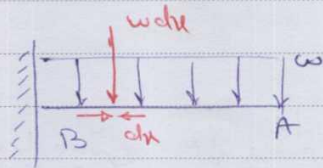
در دو آرایش مختلف از قضیه کاستیلیانو (+) و (-) پس در این دو حالت دایره ای است

و این (-) با دایره علامت مثبت است



$$y = \frac{P}{6EI} (-x^3 + 3Lx^2)$$

Q24:



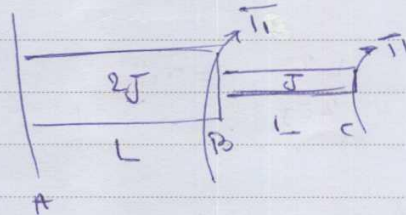
$$y_{A,F} = \alpha_{Ax} F \quad \alpha_{Ax} = \alpha_{xA} \quad \alpha_{xA} = \frac{1}{6EI} (-x^3 + 3Lx^2)$$

$$y_{A,F} = \frac{F}{6EI} (-x^3 + 3Lx^2)$$

$$F \rightarrow w dx \quad dy_{A,w} = \frac{1}{6EI} (-x^3 + 3Lx^2) w dx$$

$$\Rightarrow y_{A,w} = \int_0^L \frac{w(-x^3 + 3Lx^2)}{6EI} dx = \frac{wL^4}{8EI}$$

Q25:



$$\phi_c = ?$$

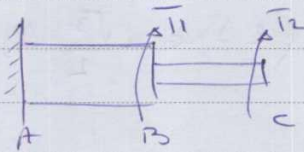


Subject: _____

Year: _____ Month: _____ Date: _____

$$U = U(T_1) \quad \frac{\partial U}{\partial T_1}$$

در یک سیستم، با فرض اینکه دما در تمام نقاط یکسان باشد، تغییر دما در هر دو طرف را تغییر دما می‌دهد.

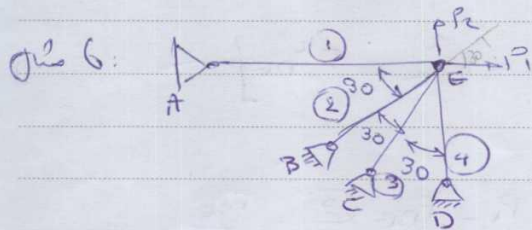


$$\phi_c = \frac{\partial U(T_1, T_2)}{\partial T_2}$$

$$U = \int_0^{2L} \frac{T^2(x)}{2J(x)G(x)} dx$$

$$= \int_0^L \frac{(T_1 + T_2)^2 dx}{2J(x)G(x)} + \int_L^{2L} \frac{T_2^2 dx}{2J(x)G(x)}$$

$$\phi_c = \frac{\partial U}{\partial T_2} = \int_0^L \frac{T_2 + T_1}{JG} dx + \int_L^{2L} \frac{T_2}{JG} dx = \frac{L}{JG} \left(\frac{T_2 + T_1 + T_2}{2} \right)$$



نوع مسئله: 2

2 رابطه تبدیل افقی و عمودی برای مفصل E

$$F_1, F_2, F_3, F_4, \Delta x_E, \Delta y_E$$

پرسش مقادیر؟

$$\Delta L_i (\Delta x_E, \Delta y_E) = \frac{F_i L}{EA} \quad \leftarrow \text{به این روش رفته ایم}$$

$$U = U_1 + U_2 + U_3 + U_4 \quad (1)$$

$$U_i = \frac{1}{2} k (\Delta L_i)^2 \quad (2)$$

$$\Delta L_1 = \Delta x_E \quad \Delta y_E \text{ جابجایی}$$

$$\frac{EA}{L}$$

مسئله 1) محاسبه (برای هر یک از اعضا)

$$\Delta L_2 = (\cos 30^\circ) \Delta x_E + \sin(30^\circ) \Delta y_E$$



Subject:

Year. Month. Date. ()

$$\Delta L_3 = \frac{\Delta x_E}{2} + \frac{\sqrt{3} \Delta y_E}{2}, \quad \Delta L_4 = \Delta y_E \quad (3)$$

$$P_1 = \frac{\partial U}{\partial (\Delta x_E)} \xrightarrow{(1), (2), (3)} P_1 = \frac{EA}{L} \left(2 \Delta x_E + \frac{\sqrt{3}}{2} \Delta y_E \right) \quad (4)$$

$$P_2 = \frac{\partial U}{\partial (\Delta y_E)} \rightarrow P_2 = \frac{EA}{L} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \Delta x_E + 2 \Delta y_E \right) \quad (5)$$

$$(4), (5) \rightarrow \begin{cases} \Delta x_E = \frac{2L}{13EA} (4P_1 - \sqrt{3}P_2) & (6) \\ \Delta y_E = \frac{2L}{13EA} (4P_2 - \sqrt{3}P_1) & (7) \end{cases}$$

$$F_B = F_{BE} = \frac{EA}{L} (\Delta L_2) \xrightarrow{(3), (6), (7)} F_B = \frac{2}{13} \left[\frac{3\sqrt{3}}{2} P_1 - \frac{1}{2} P_2 \right]$$

$$U = \frac{1}{2k} \sum F_i^2 \quad \text{حال بهر حال نیروها (نیروها)} \quad U = U(F_1, F_2, \dots)$$

$$U = \frac{1}{2} \frac{L}{EA} \left[F_{AE}^2 + F_{BE}^2 + F_{CE}^2 + F_{DE}^2 \right]$$

$$\begin{aligned} \sum F_{xE} = 0 \\ \sum F_{yE} = 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} F_{AE} = P_1 - \frac{F_{BE} \sqrt{3}}{2} - \frac{F_{CE}}{2} \\ F_{DE} = P_2 - \frac{F_{BE}}{2} - \frac{F_{CE} \sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow U = \frac{1}{2EA} \left[\left(P_1 - \frac{F_{BE} \sqrt{3}}{2} - \frac{F_{CE}}{2} \right)^2 + \left(P_2 - \frac{F_{BE}}{2} - \frac{F_{CE} \sqrt{3}}{2} \right)^2 + F_{BE}^2 + F_{CE}^2 \right]$$

$$\frac{\partial U}{\partial F_{BE}} = 0 \quad \text{یا} \quad \frac{\partial U}{\partial F_{BE}} = 0 \quad \rightarrow \quad F_B$$



www.Dastyarkhoob.ir

Dastyarkhoob

Subject:

Year: Month: Date:

$$\begin{cases} U = U(F_1, \dots) \xrightarrow{\text{castig}} F_1 \dots \checkmark \rightarrow \pi_1 \dots \checkmark \\ U = U(h_1, \dots) \xrightarrow{\text{castig}} \pi_1 \dots \checkmark \rightarrow F_1 \dots \checkmark \end{cases}$$

$$\delta U = \sqrt{3}/2 (P_1 - F_{BE} \sqrt{3}/2 - F_{CE} l_2) - 1/2 (P_2 - F_{BE} l_2 - F_{CE} \sqrt{3} l_2) + F_{BE} = 0$$

$$\delta U = \frac{\partial U}{\partial F_{CE}} = 0 \Rightarrow -1/2 (\quad) - 1/2 (\quad) + F_{CE} = 0$$

$$\Rightarrow F_{BE}, F_{CE} \checkmark \Rightarrow F_{AE}, F_{DE} \checkmark \Rightarrow \text{logically}$$

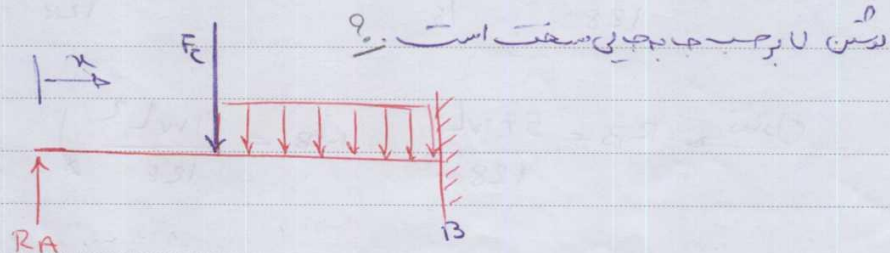
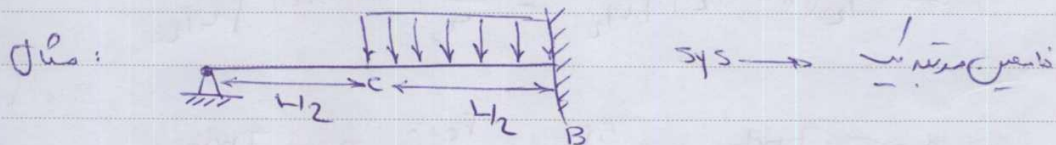
$$F_{BE} = \frac{2}{13} \left[\frac{3\sqrt{3}}{2} P_1 - 1/2 P_2 \right]$$

$$F_{CE} = \frac{1}{13} \left[P_2 - \sqrt{3} P_1 \right]$$

* اگرچه می‌توانیم (2) را حل کنیم: از روش دیگر روش معادل و سیستم‌های (1)، (3)، (4)

نصف (2) در سیستم معادل انرژی را می‌توانیم با حل (2) و (3) و (4) از روش دیگر

تلاش کنید این Q. را حل کنید (2) در سیستم معادل



P4PCO

(19)



www.DastyarKhoob.ir

DastyarKhoob

Subject:

Year: Month: Date: ()

$$\rightarrow M(x) = R_A x - \frac{w(x-L/2)^2}{2} - F_c(x-L/2)$$

$$U = \int_0^L \frac{M^2(x)}{2EI} dx$$

$$\delta A = \frac{\partial U}{\partial R_A} = 0 \Rightarrow \int_0^L \frac{M(x)}{EI} \frac{\partial M(x)}{\partial R_A} dx = 0$$

$$\Rightarrow \int_0^L \left(R_A x - \frac{w}{2}(x-L/2)^2 - F_c(x-L/2) \right) x dx = 0 \quad (*)$$

$$\underbrace{(x-L/2)x}_{\substack{m \\ m+1}} = (x-L/2)^m + L/2(x-L/2)^m$$

$$\begin{aligned} & R_A \frac{x^3}{3} \Big|_0^L - \frac{w(x-L/2)^4}{8} \Big|_{L/2}^L - \frac{w(x-L/2)^3 L}{12} \Big|_{L/2}^L \\ & - F_c \frac{(x-L/2)^3}{2} \Big|_{L/2}^L - \frac{F_c L(x-L/2)^2}{4} \Big|_{L/2}^L \end{aligned}$$

$$\Rightarrow R_A = \frac{7wL}{128} + \frac{5F_c}{16} \xrightarrow{F_c=0} R_A = \frac{7wL}{128}$$

$$\xrightarrow{\text{Down}} R_B = \frac{57wL}{128}, \quad M_B = \frac{9wL^2}{128} \quad \downarrow$$



Subject :

Year . Month . Date . ()

$$\delta_c = \frac{\partial U}{\partial F_c} = \frac{1}{EI} \int_0^L M(x) \frac{\partial M(x)}{\partial F_c} dx$$

$$M(x) = \underbrace{\frac{7wL}{128} x + \frac{5F_c}{16} x}_{R(x)} - F_c \langle x - L/2 \rangle - \frac{w}{2} \langle x - L/2 \rangle^2$$

$$\frac{\partial M(x)}{\partial F_c} = \frac{5x}{16} - \langle x - L/2 \rangle$$

$$EI \delta_c = \int_0^L M(x) \left|_{F_c} \frac{\partial M(x)}{\partial F_c} dx = \int_0^L \left(\frac{7wLx}{128} - \frac{w \langle x - L/2 \rangle^2}{2} \right) \left(\frac{5x}{16} - \langle x - L/2 \rangle \right) dx$$

$$= \frac{5}{16} \int_0^L \left(\frac{7wLx}{128} - \frac{w \langle x - L/2 \rangle^2}{2} \right) x dx \quad * \rightarrow 0$$

$$+ w \int_0^L \left(\frac{-7Lx \langle x - L/2 \rangle}{128} + \frac{w \langle x - L/2 \rangle^3}{2} \right) dx$$

$$\frac{13wL^4}{258 \times 24} \quad (1)$$

چونکه F_c ثابت است پس مشتق آن صفر است و (1) مشتق آن نسبت به F_c صفر است.

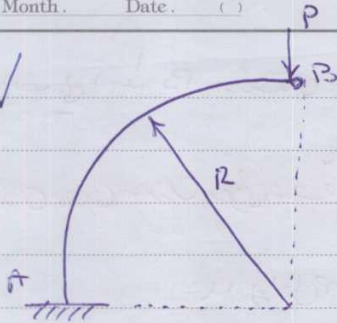
در نهایت B این رابطه را در M قرار می دهیم و M_B را به دست می آوریم.



Subject :

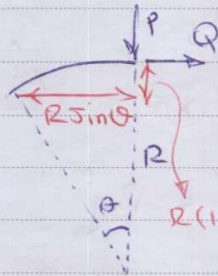
Year . Month . Date . ()

دسته : ✓



برش مستوی است. ۱. بار منطبق بر آن نیز همان غیر عمود است

از آن جهت نیروهای برشی و ممان صرفاً تغییر می کند



$$M_\theta = PR \sin \theta + QR (1 - \cos \theta)$$

$$R(1 - \cos \theta)$$

$$U = \int_0^{\pi/2} \frac{M^2(\theta) R d\theta}{2EI}$$

$$\Delta y_B = \frac{\partial U}{\partial P} \bigg|_{Q=0} = \frac{1}{EI} \int_0^{\pi/2} (PR \sin \theta) \left(\frac{\partial M_\theta}{\partial P} \right) R d\theta$$
$$= \frac{\pi P R^3}{4EI}$$

$$\Delta x_B = \frac{\partial U}{\partial Q} \bigg|_{P=0} = \int_0^{\pi/2} (PR \sin \theta) (R(1 - \cos \theta)) R d\theta = \frac{PR^3}{2EI}$$

دسته :



www.DastyarKhoob.ir

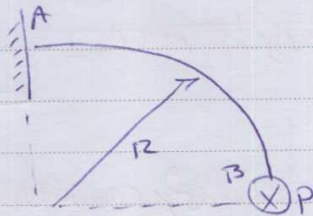
DastyarKhoob

تغیر در چرخش → Torsion

واقتل چرخش → Bending

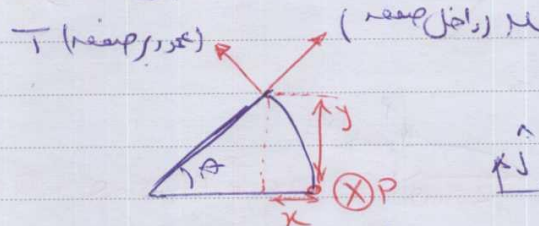
Year. Month. Date.

مثال
* 50 *



محاسبه تغییرات B در راستای محور چرخش

از اثر دایره‌ای بودن برشی صرف نظر می‌کنیم



$$\vec{L}(\theta) = L_x \hat{i} + L_y \hat{j} = P_y \hat{i} + P_x \hat{j}$$

$$M(\theta) = L_x \cos \theta + L_y \sin \theta$$

$$T(\theta) = -L_x \sin \theta + L_y \cos \theta$$

$$x = R(1 - \cos \theta)$$

$$y = R \sin \theta$$

$$M(\theta) = PR \left[\dots \right]$$

$$\dots (1 - \cos \theta) \sin \theta + \sin \theta \cos \theta$$

$$PR(\cos \theta - 1)$$

$$= PR \sin \theta$$

$$U = \frac{1}{2EI} \int_0^{\pi/2} M^2 R d\theta + \frac{1}{2GJ} \int_0^{\pi/2} T^2 R d\theta$$

$$\delta_B = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{1}{EI} \int_0^{\pi/2} (PR \sin \theta) (R \sin \theta) R d\theta$$

در راستای
محور چرخش

$$+ \frac{1}{GJ} \int_0^{\pi/2} (PR)(1 - \cos \theta) R(1 - \cos \theta) R d\theta$$

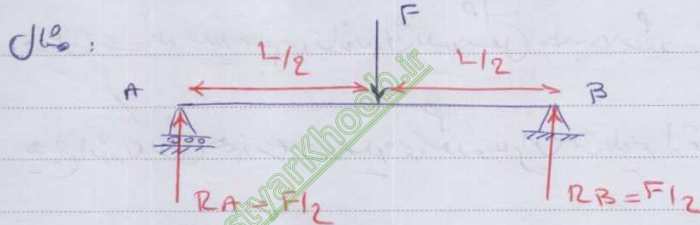
$$= \frac{\pi}{4} \frac{PR^3}{EI} + \frac{3\pi - 8}{4} \frac{PR^3}{GJ}$$

PAPCO



Subject:

Year: Month: Date: ()



$$\frac{\partial U}{\partial R_A} \stackrel{?}{=} 0 \quad M(x) = R_A x - F(x - L/2)$$

$$\frac{\partial U}{\partial R_A} = \frac{1}{EI} \int_0^L \frac{\partial M}{\partial R_A} M dx = \frac{1}{EI} \int_0^L x (R_A x - F(x - L/2)) dx$$

$$= \frac{1}{EI} \left(R_A \frac{L^3}{3} - \frac{5}{48} FL^3 \right) = 0 \Rightarrow R_A = \frac{5}{16} F \neq F/2$$

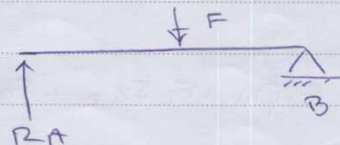
$$\frac{\partial U}{\partial R_A} \neq 0 \leftarrow F = 2R_A \quad \text{مساوی نیست } R_A, F$$

$$M(x) = R_A x - 2R_A (x - L/2)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial U}{\partial R_A} = \frac{1}{EI} \int_0^L (x - 2(x - L/2)) (R_A x - F(x - L/2)) dx$$

$$= \frac{RAL^3}{24EI} \neq 0 \quad \text{همان‌طور که در مثال دیدیم}$$

این نتیجه را می‌توانیم به این روش نیز به دست آوریم:
تغییر اصل کمین





Subject :

Year . Month . Date . ()

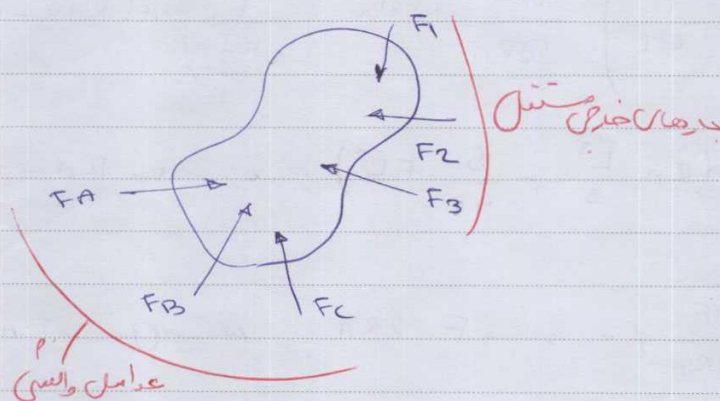
داین مبد جسم می تواند در وقت تغییر شکل جابجیا شود. وقتی تغییر شکلی نداشته باشیم پس

هیچ انرژی روشی هم در جسم زخمیه نمی گور و بنابر این صحت نداریم از قضیه کاستیلیانو استفاده کنیم.

* استفاده از قضیه کاستیلیانو:

شروط (I) : جسم به اندازه کافی طافی را این بارها را عکس العملی و موافق باشد در به بارها را خارج مستهل

ایمانی باشد که خود را محدودیت تنظیم کنند که تعادل برقرار باشد



$$C = C(F_1, F_2, F_3, \dots)$$

یا F_A, F_B, F_C

$$\delta C = \frac{\partial C}{\partial F_1} \delta F_1 + \frac{\partial C}{\partial F_2} \delta F_2 + \dots$$

$$\delta C_{we} = \alpha_1 \delta F_1 + \alpha_2 \delta F_2 + \dots + \alpha_A \delta F_A + \alpha_B \delta F_B + \alpha_C \delta F_C$$

$$\delta W_e = F_1 \delta x_1 + F_2 \delta x_2 + F_3 \delta x_3 + \dots + F_A \delta x_A + F_B \delta x_B + F_C \delta x_C$$



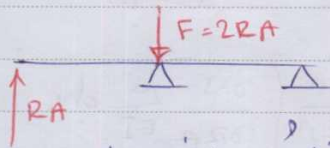
Subject :

Year . Month . Date . ()

$$\delta C = \delta C_{we} \Rightarrow \kappa_A = \kappa_B = \kappa_C = 0$$

خط (II) - طبقه ها در صلب هستند جانبروها و کلیه گامی را از دستهای آزاد میزنند

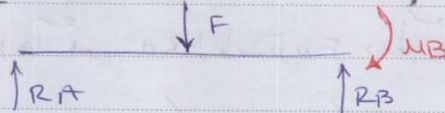
در حالتی که $F = 2RA$ از سیستم غیر انتفاخ است و در زیر این است آوریم.



در این صورت $\kappa_i = \frac{\partial U}{\partial F_i}$ جانبره F_i تغییر جزئی را ایجاد می کند و سایر نیروها مستقلند

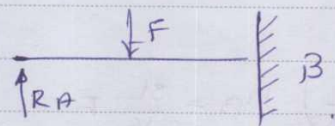
تغییر یافته (نیروها و کلیه ها) صلب هستند تغییر یافته در κ_A ، κ_B و κ_C است

صفحات (جانبره از این جانبره انتفاخ است) در صورتی که $M(x)$ تغییر یافته



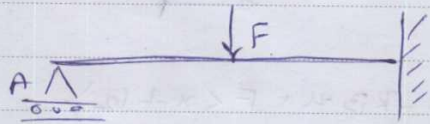
در حالت (I) : برقرار است

تغییر κ_B و RB در صورتی که صلب (cantilever) : برقرار است (III)



تغییر κ_B در صورتی که صلب $\frac{1}{EI} (RA \frac{L^3}{3} - \frac{5FL^3}{48})$

وقتی غیر انتفاخ است و در زیر این است آوریم (در واقع نیرو و کلیه گامی را از دستهای آزاد میزنند)



در این صورت



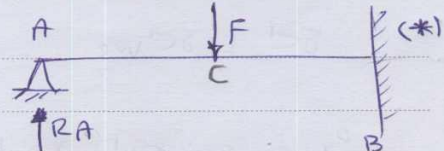
www.DastyarKhoob.ir

DastyarKhoob

Subject :

Year . Month . Date . ()

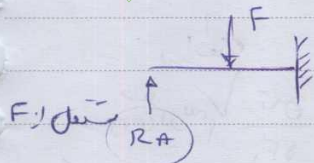
$$M(x) = R_A x - F(x - L/2) \quad \text{چاپ؟}$$



$$\frac{\partial U}{\partial F} = \frac{\partial R_A}{\partial F} \left(\frac{\partial M}{\partial R_A} \right) \frac{M(x)}{EI} dx$$

در اینجا $\frac{\partial R_A}{\partial F} = \frac{5}{16}$

$$+ \frac{\partial F}{\partial F} \int \frac{\partial M}{\partial F} \frac{M(x)}{EI} dx$$

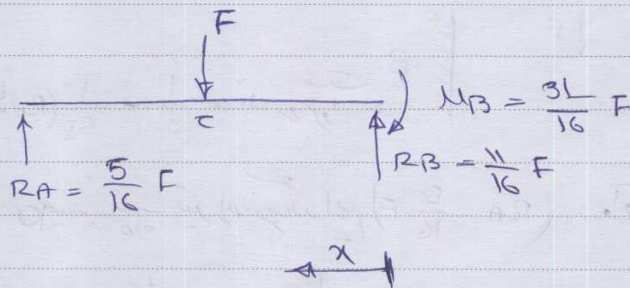


$$\delta_A = 0 = \frac{\partial U}{\partial R_A} = \frac{\partial R_A}{\partial R_A} \left(\frac{\partial M}{\partial R_A} \right) \frac{M}{EI}$$

$$+ \frac{\partial F}{\partial R_A} \int \frac{\partial M}{\partial F} \frac{M}{EI} dx$$

در اینجا (*) اگر R_A را با F در نظر بگیریم هم می‌توانیم به این نتیجه برسیم.

میتوانیم اول است و می‌توانیم این دو را به هم وصل کنیم و استیل در نظر بگیریم.



$$M(x) = M_B - R_B x + F(x - L/2)$$

$$\frac{\partial U}{\partial F} = \delta_C = \frac{1}{EI} \int_0^L \left(\frac{3LF}{16} - \frac{11F}{16} x + F(x - L/2) \right) \left(\frac{3L}{16} - \frac{11}{16} x \right) dx$$

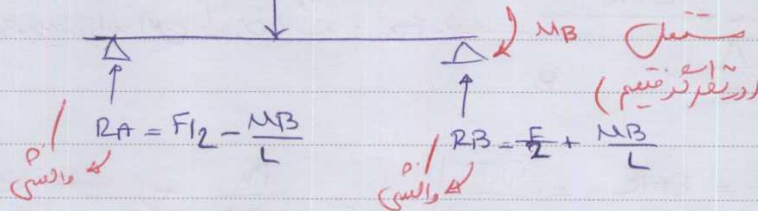
$$= \frac{7FL^3}{48 \times 16EI}$$



این sys معین باشد، وقتی بجای یک تکیه ۰ نیویک می‌کند می‌توانیم شرط (I) تعریف کرد.
(آخر سال معین کردیم که مستقیم نمی‌خواهد، تعادل بند نیست)

Subject:

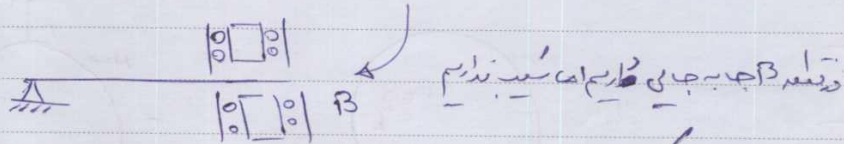
Year: Month: Date: ()



$$\frac{\partial U}{\partial F} = \delta_c = \frac{1}{EI} \int_0^L \left(\frac{3LF}{16} - \frac{11Fx}{16} + F(x - L/2) \right) \left(\frac{3L}{16} - \frac{11x}{16} + (x - L/2) \right) dx$$

حال حدس: این پراکنش باید عرض دارد.
 در تکیه B مستقیم باشد: $0 = 1/2 x + (x - L/2)$

در تکیه B مستقیم باشد: $(-L/2 + 0 + (x - L/2))$



$F_A = P$
 $P = F_B$

$\frac{\partial U}{\partial P}$
 در تکیه B مستقیم باشد

شرط (I): می‌توانیم از P مستقیم در نظر گرفتن و افقی باشد

میتوانیم F_A را افقی باشد. شرط (II): در نقطه A باید عمود باشد



$\frac{\partial U}{\partial F_B} = \frac{F_B L}{EA} = \frac{PL}{EA}$

این مستقیم باشد و B هم تغییر طول پیدا می‌کند. و تغییر طول پیدا می‌کند و هم تغییر می‌کند



www.DastyarKhoob.ir

DastyarKhoob

Subject:

Year: Month: Date: ()

$$\delta U_{E1} = \frac{\partial U}{\partial F_{Ey}} = 0$$

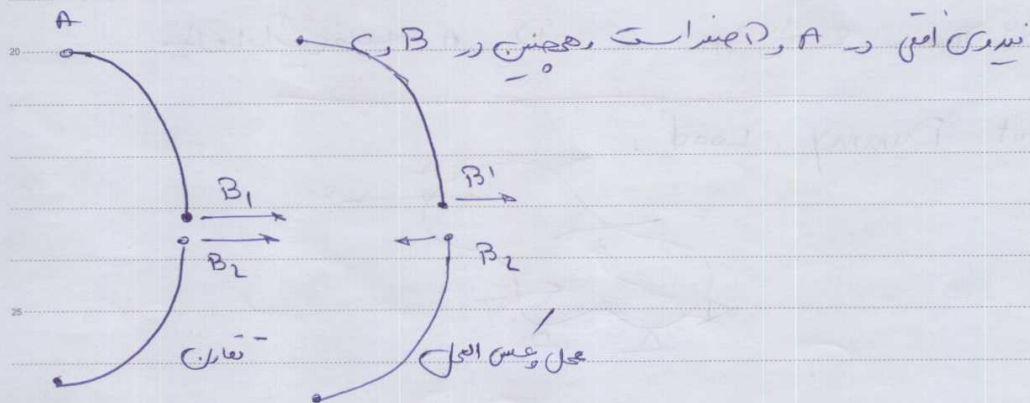
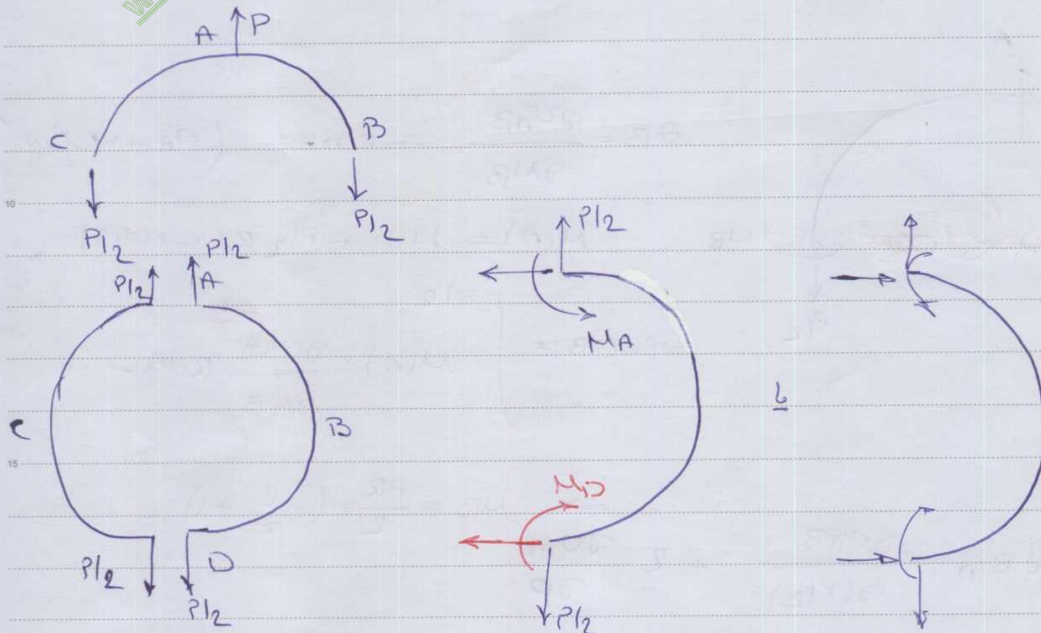
$$\delta U_{E1} = \frac{\partial U}{\partial F_{Ex}} = 0$$

$$\delta U_{E1} = \frac{\partial U}{\partial M_E} = 0$$

تعیین یا استخراج از معادلات F_{Ex} , M_E , P و F_{Ey} در جهات مشخص

$\rightarrow F_{Ey}, F_{Ex}, M_E$

P در P_1



PAPCO

(10)

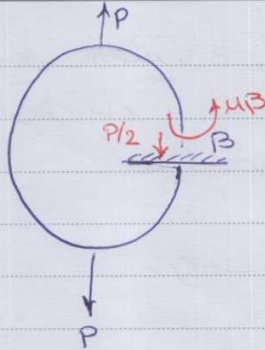


www.DastyarKhoob.ir

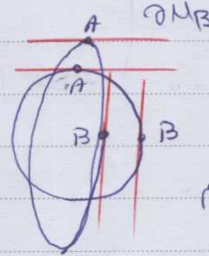
DastyarKhoob

Subject: _____

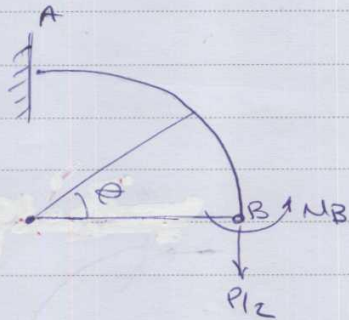
Year. _____ Month. _____ Date. _____



$$\theta_B = \frac{\partial U}{\partial M_B} = 0 \Rightarrow P \rightarrow M_B$$



میزان دران A و B
نیز در آن نقطه صفر است چون در آن
مکان تغییر می کند.



$$\theta_B = \frac{\partial U_{AB}}{\partial M_B} = \theta_A = 0 \quad (\theta_A = 0 \text{ در آن نقطه})$$

$$M(\theta) = M_B - P/2 R (1 - \cos \theta)$$

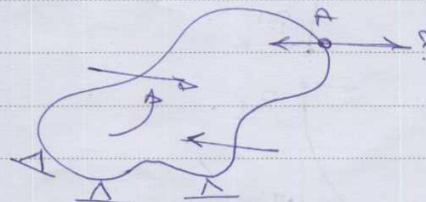
$$\Rightarrow \theta_B = \int_0^{\pi/2} M(\theta) \times \frac{\partial M(\theta)}{\partial M_B} R d\theta = 0$$

$$\Rightarrow M_B = \frac{PR}{2} \left(-\frac{2}{\pi} + 1 \right)$$

$$\Delta y_{B/A} = \frac{\partial U_{AB}}{\partial (P/2)} = 2 \frac{\partial U_{AB}}{\partial P}$$

$$\Delta y_{D/A} = 2 \Delta y_{B/A} = D_A \text{ میزان افزایش طول A}$$

Unit Dummy Load:





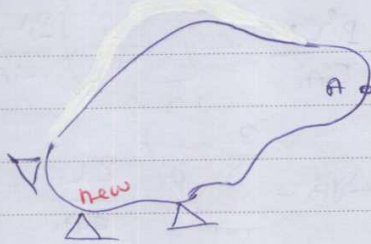
www.DastyarKhoob.ir

DastyarKhoob

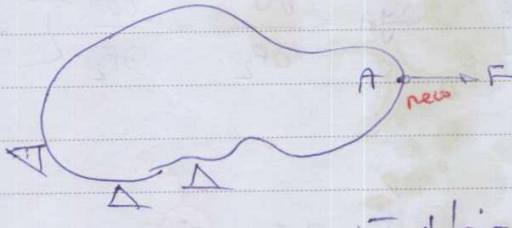
Subject:

Year: Month: Date: ()

نوابی صافی اعتبار را بر روی تفسیر عمل ها لایق باشد.



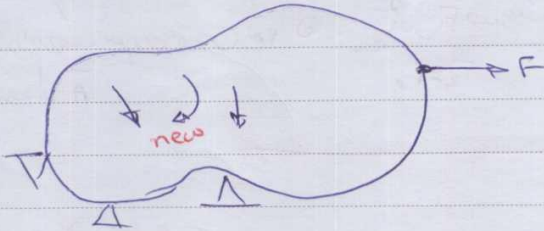
(10)



(11)

فرض: sys خالی است

$$\Delta x_A = \Delta x_A(2) - \Delta x_A(1)$$

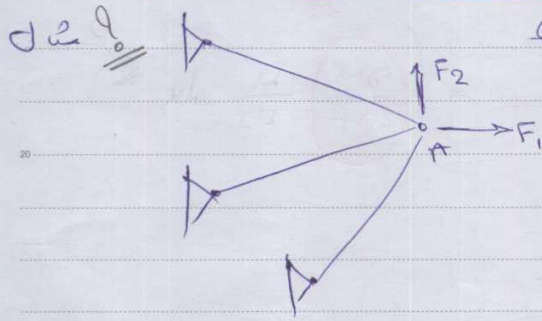


(2)

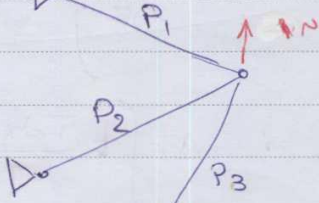
dummy load: فرضی

$$\delta W_e + \delta W_i = 0 \Rightarrow F \times \Delta + \sum_i (\bar{F}_i \Delta_i) = 0$$

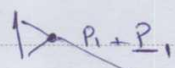
$$F_i = -\bar{F}_i \Rightarrow F \times \Delta = \sum_i \bar{F}_i \Delta_i \quad F=1 \Rightarrow \Delta = \sum_i \bar{F}_{i,1} \Delta_i$$



$\Delta y_A = ?$



(11)



$P_1 + P_2$

$F_2 + 1$

F_1

$\sum_{i=1}^3 \frac{P_i L_i}{E_i A_i} = \Delta y_A$

P4PCO

(24)

(2)



Subject: _____

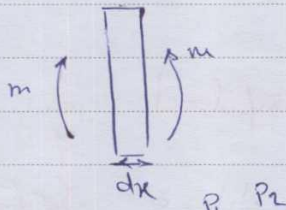
Year: _____ Month: _____ Date: _____

$$\text{Castig: } \Delta y_A = \frac{\partial U}{\partial F_2} = \frac{\partial}{\partial F_2} \left[\sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} \frac{P_i^2 L_i}{E_i A_i} \right] = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial P_i}{\partial F_2} \right) \frac{P_i L_i}{E_i A_i}$$

$$\Delta y_B = \sum_{i=1}^3 P_i \frac{P_i L_i}{E_i A_i}$$

جو sys $\rightarrow P_i = c_{i1} F_1 + c_{i2} F_2$

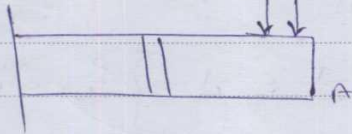
$$\rightarrow \frac{\partial P_i}{\partial F_2} = c_{i2} \quad \text{where } F_1 = 1, \quad \text{قرارداد می‌دهیم که } F_1 = 1 \text{ در تمام موارد}$$



$$\Delta i = dy'$$

$$dy' = y'' dx$$

$$dy' = \frac{M}{EI} dx$$



$$\Delta = \int_0^L m \frac{M}{EI} dx$$

$$\text{castig: } \Delta = \frac{\partial}{\partial F} \int_0^L \frac{M^2 dx}{2EI} = \int_0^L \left(\frac{\partial M}{\partial F} \right) \frac{M}{EI} dx$$

$$\text{Castig: } \Delta = \int_0^L \frac{1}{EI} dx$$



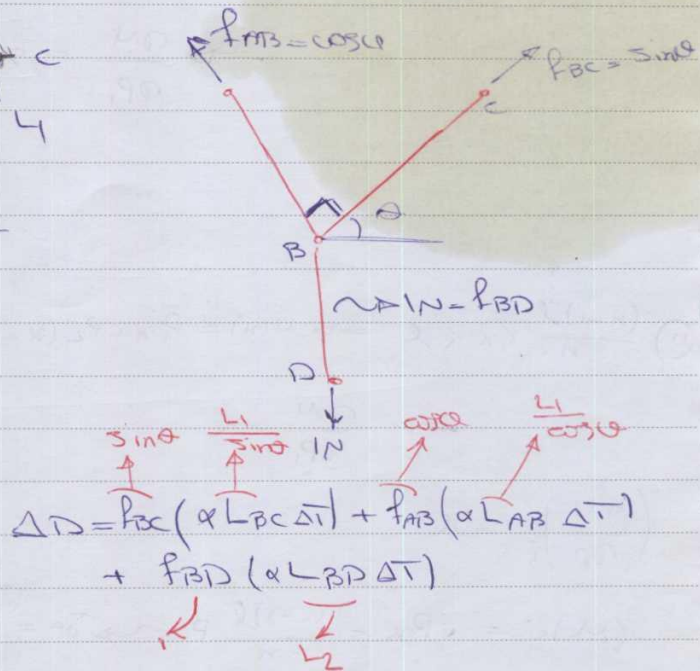
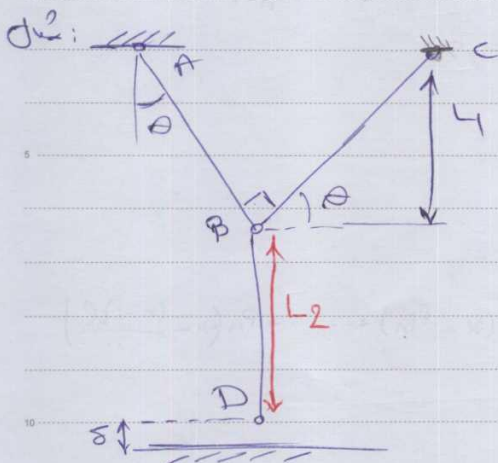
www.DastyarKhoob.ir

DastyarKhoob

Subject:

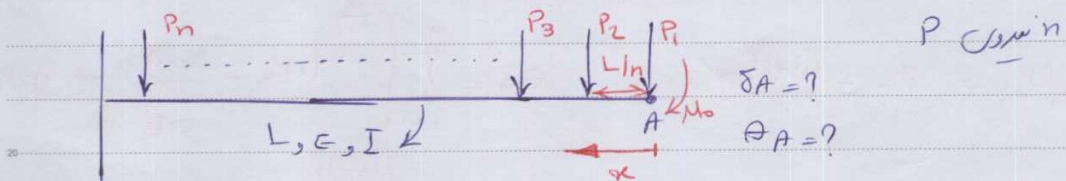
Year. Month. Date. ()

دایره‌های در برابر تغییرات دما و تغییرات طول



$$\Delta D = P_{BC} (\alpha L_{BC} \Delta T) + P_{AB} (\alpha L_{AB} \Delta T) + P_{BD} (\alpha L_{BD} \Delta T)$$

$$\Rightarrow \Delta D = \alpha \Delta T (2L_1 + L_2) \quad \Delta D = \delta \Rightarrow \Delta T = \frac{\delta}{\alpha (2L_1 + L_2)}$$



$$P_1 = P_2 = \dots = P_n = P$$

فرضیات: P و L و E و I

$$① \quad 0 < x < \frac{L}{n} \Rightarrow M(x) = P_1 x \xrightarrow{+M_0} \frac{\partial M}{\partial P_1} = x \quad \frac{\partial M}{\partial M_0} = 1$$

$$② \quad \frac{L}{n} < x < \frac{2L}{n} \Rightarrow M(x) = P_1 x + P_2 (x - L_1) \xrightarrow{+M_0} \frac{\partial M}{\partial P_1} = x$$

P4PCO

(14)



Subject:

Year. Month. Date. ()

$$\textcircled{3) \frac{2l}{n} < x < \frac{3l}{n} \Rightarrow U(x) = P_1 x + P_2 (x - l/n) + P_3 (x - \frac{2l}{n})$$

$$\Rightarrow \frac{\partial U}{\partial P_1} = x$$

$$\textcircled{n) \frac{(n-1)l}{n} < x < l \Rightarrow U(x) = P_1 x + P_2 (x - l/n) + \dots + P_n (x - \frac{(n-1)l}{n})$$

$$\Rightarrow \frac{\partial U}{\partial P_1} = x$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial p} \right)_i = x$$

$$(U)_i = i P_n - \frac{(i-1)l}{n} P \quad \delta A = \sum_{i=1}^n \int_{\frac{(i-1)l}{n}}^{\frac{il}{n}} \frac{P_n (ix - \frac{(i-1)l}{n})}{EI} dx$$

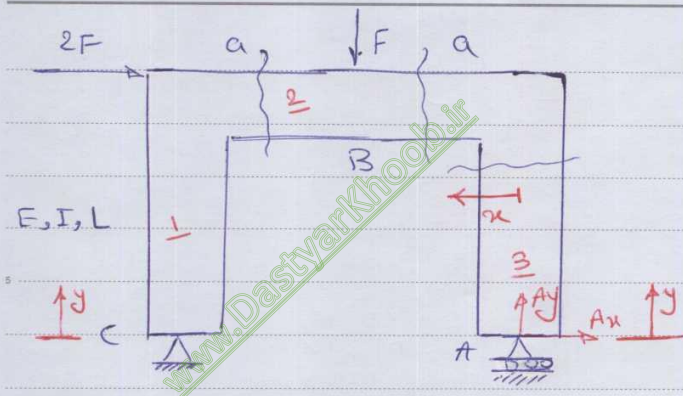
$$\left(\frac{\partial U}{\partial M_0} \right)_i = 1$$

$$(U)_i = i P_n - \frac{(i-1)l}{n} P + M_0 \quad \delta A = \sum_{i=1}^n \int_{\frac{(i-1)l}{n}}^{\frac{il}{n}} \frac{(i P_n - \frac{(i-1)l}{n} P + M_0)}{EI} dx$$



Subject:

Year. Month. Date. ()



$$\underline{3} \quad 0 < y \leq L : M = A_y y \rightarrow \frac{\partial M}{\partial A_y} = y$$

$$\underline{2} \quad 0 < x < a : M = A_y x + A_x L \rightarrow \frac{\partial M}{\partial A_x} = L$$

$$a < x < 2a : M = A_y x + A_x L - F(x-a) \rightarrow \frac{\partial M}{\partial A_x} = L$$

$$\underline{1} \quad 0 < y \leq L : M = (-2F - A_x)y \rightarrow \frac{\partial M}{\partial A_x} = -y$$

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow A_y = \frac{FL}{a} + F/2$$

$$C_x = -2F - A_x$$

$$A_x = 0 \rightarrow \frac{\partial U}{\partial A_x} = \int_0^L \frac{(-2F)(-y)}{EI} dy + \int_0^a \frac{F(\frac{L}{a} + \frac{1}{2})L}{EI} x dx + \int_a^{2a} \left[F\left(\frac{L}{a} + \frac{1}{2}\right)x - F(x-a) \right] \frac{L}{EI} dx + \int_0^L 0$$



www.DastyarKhoob.ir

DastyarKhoob

Subject :

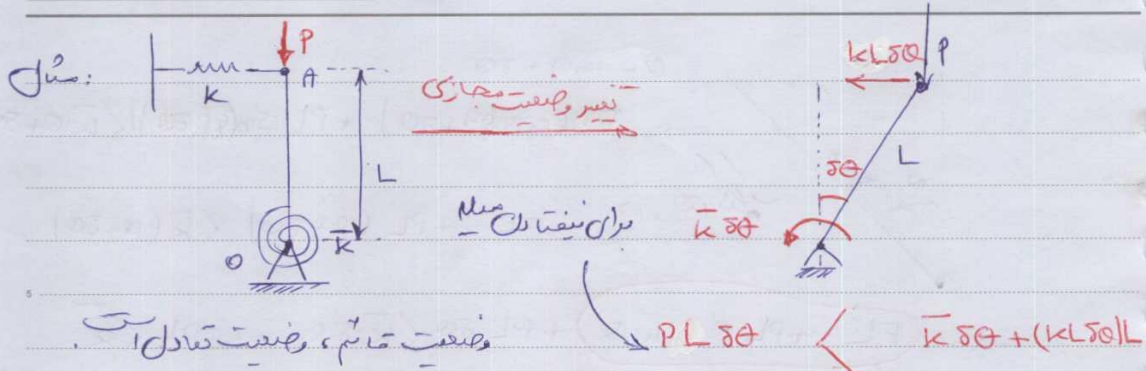
Year . Month . Date . ()

P4PCO



Subject:

Year. Month. Date. ()



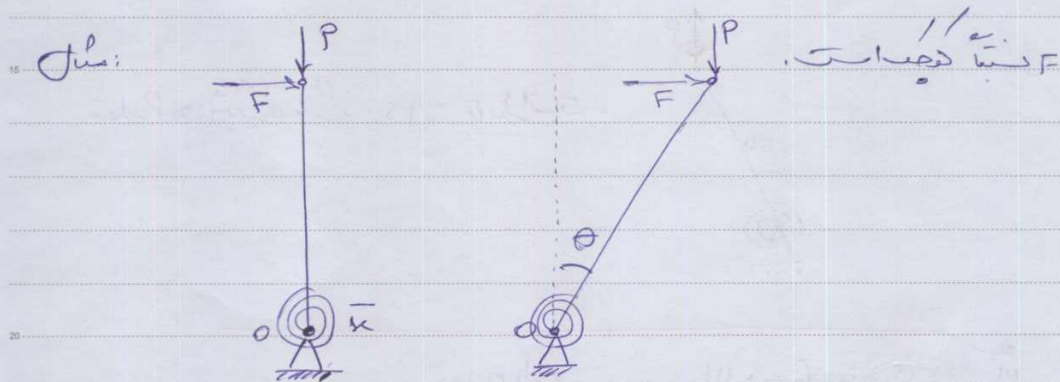
قبل از تغییر

$$P < \frac{\bar{k}}{L} + kL$$

قبل از تغییر

$$P > \frac{\bar{k}}{L} + kL$$

$$P_{cr} = \frac{\bar{k}}{L} + kL$$



$$\sum M_o = 0 \Rightarrow F L \cos \theta + P L \sin \theta = \bar{k} \theta$$

نسبت تغییرات

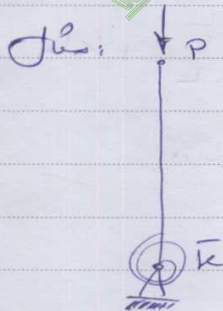
$$\theta \text{ کوچک (نسبت تغییرات) } \Rightarrow (\bar{k} - PL) \theta = FL \Rightarrow \theta = \frac{FL}{\bar{k} - PL}$$



Subject:

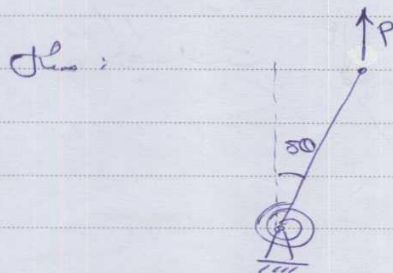
Year. Month. Date. ()

$\theta \rightarrow \theta + \delta\theta$
 $FL \cos(\theta + \delta\theta) + PL \sin(\theta + \delta\theta) < \bar{k}(\theta + \delta\theta)$
 $FL + PL(\theta + \delta\theta) < \bar{k}(\theta + \delta\theta)$
 $FL + PL\theta - \bar{k}\theta + PL\delta\theta < \bar{k}\delta\theta \Rightarrow PL < \bar{k}$
 $0 \quad (\theta = \frac{FL}{\bar{k} - PL})$
 $\Rightarrow P_{cr} = \frac{\bar{k}}{L}$



$P_{cr} = \frac{\bar{k}}{L}$

مقدار F در تابع نویسی افت می‌کند
 که به دلیل قدرت فنر می‌باشد این باید باشد
 که به این معنی به سمت چپ حرکت کرده



مقدار P همواره مثبت باشد و باید باشد.

تعداد تابع

$$\delta U - \delta W_e = 0 \quad (1)$$

اگر اینجا (1) برقرار باشد و همواره داشته باشیم $\delta(U - W_e) > 0$

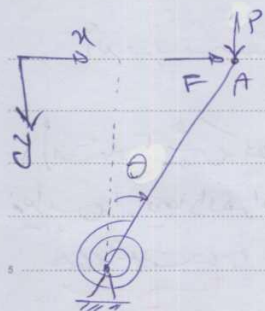
باز این همه انحراف ها باید $\delta(U - W_e) > 0$ برقرار باشد تا تعادل پایدار باشد

اگر از این همه انحراف ها $\delta(U - W_e) < 0$ باشد این انحراف بزرگ و تعادل ناپایدار



Subject:

Year. Month. Date. ()



$$\delta U = \delta W_e = 0$$

$$U = \frac{1}{2} k x^2 \Rightarrow \delta U = k x \delta x$$

$$\delta W_e = F \delta x_A + P \delta y_A$$

$$L \sin \theta$$

$$L(1 - \cos \theta)$$

$$\Rightarrow \delta W_e = FL \cos \theta \delta \theta + PL \sin \theta \delta \theta \quad \xrightarrow{\text{بالا}} FL \delta \theta + PL \delta \theta$$

$$\delta U - \delta W_e = 0 \Rightarrow (kx - PL) \delta \theta - FL \delta \theta = 0 \Rightarrow \delta \theta = \frac{FL}{k - PL}$$

(در اینجا $\delta \theta$ را حذف می‌کنیم)

$$\delta^2 U = \delta(\delta U) = k (\delta x)^2 + k x \delta^2 x$$

$$\delta^2 W_e = PL (\delta \theta)^2 + (PL \sin \theta + FL) \delta^2 \theta$$

در اینجا $\delta(\delta U - \delta W_e)$ را برای اطمینان از صحت بررسی می‌کنیم.

$$\delta^2 U - \delta^2 W_e = 0 \Rightarrow (k - PL) (\delta \theta)^2 + (kx - PL \sin \theta - FL) \delta^2 \theta = 0$$

$$\Rightarrow P_{cr} = \frac{k}{L}$$



PAPCO.



#7 (برای سب) 1

Subject:

Year: Month: Date: ()

$$\delta \alpha = \delta \left[\sin^{-1} (2(1 - \cos \alpha)) \right] \approx \delta [2(1 - \cos \alpha)] = 2 \sin \alpha \delta \alpha$$

$$\approx 2 \alpha \delta \alpha$$

$$\delta W_e = M \delta \alpha = 2 M \alpha \delta \alpha$$

$$\delta U - \delta W_e = 0 \Rightarrow [kL^2 \alpha - 2M\alpha] \delta \alpha = 0$$

از آنجا که $\delta \alpha$ دلخواه است، [] باید صفر باشد $\Rightarrow \delta \alpha = 0$

از همان اول هم می‌توانستیم $\delta \alpha = 0$ و $\delta U - \delta W_e = 0$ را به دست آوریم.

δU و δW_e را می‌توانیم

$$\delta^2 U = kL^2 (\delta \alpha)^2 + kL^2 \alpha \delta^2 \alpha$$

$$\delta^2 W_e = 2M (\delta \alpha)^2 + 2M \alpha \delta^2 \alpha$$

$$\text{با فرض } \delta \alpha = 0 \Rightarrow \delta (U - W_e) = 0 \Rightarrow [kL^2 - 2M] (\delta \alpha)^2$$

$$+ [kL^2 \alpha - 2M\alpha] \delta^2 \alpha = 0$$

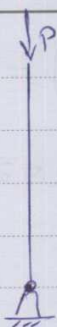
" ($\alpha = 0$)

$$\delta U - \delta W_e = 0 \Rightarrow \boxed{M_{cr} = \frac{kL^2}{2}}$$

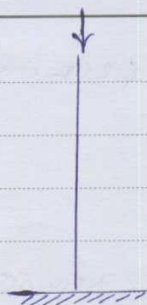


Subject:

Year: Month: Date: ()



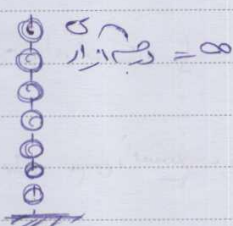
$$P_{cr} = 0$$



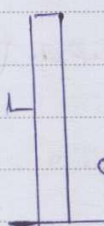
آزمایش کامل صلب

$$P_{cr} = \infty$$

در واقعیت ستون کاملاً صلب نیست

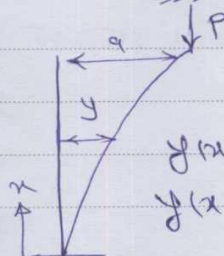


$$\delta = \infty$$



ستون در واقعیت این طوری نیست بلکه در واقع:

ستون از میله های کوچک تشکیل شده و با هم پیوسته اند و هم وصل هستند



درست اندر این نیست. برای انحرافات کوچک در یک
نقطه می توانیم یک سطح فرضی
همان طوری است.

$$M(x) = EI y''(x) \quad (2)$$

$$M(x) = P(a - y) \quad (3)$$

$$(2), (3) \rightarrow EI y'' = P(a - y) \xrightarrow{\frac{P}{EI} = q^2} y'' + q^2 y = \frac{Pa}{EI}$$

$$\Rightarrow y = A \sin(qx) + B \cos(qx) + a \quad (4)$$

$$y(x=0) = 0 \Rightarrow 0 + B + a = 0 \quad (5)$$

$$P4PCO \quad y'(x=0) = 0 \Rightarrow Aq \cos(0) - Bq \sin(0) = 0 \Rightarrow A = 0 \quad (6)$$

$$(4), (5), (6) \Rightarrow y = a(1 - \cos \sqrt{\frac{P}{EI}} x) \quad (7)$$



Subject:

Year: Month: Date: ()

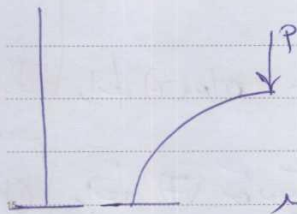
$$(1) \text{ و } (7) \Rightarrow a = a(1 - \cos \sqrt{\frac{P}{EI}} L) \quad \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow \cos \sqrt{\frac{P}{EI}} L = 0$$

آنرا $a=0$ جواب بیعی است که ستون در حالت قائم در مقابل آن (we already know that.)

$$\cos \sqrt{\frac{P}{EI}} L = 0 \Rightarrow P = \frac{(2k+1)^2 \pi^2 EI}{4L^2} \quad (8) \quad k=0, 2, 4, \dots$$

$$P_{cr} = P|_{k=0} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2}$$

جواب به ازای $k > 0$ می باشد.



۱- میل ارتعاشی برده و پس از برداشته؟ به حالت اولیه برنگردد

۲- ستون پس از buckling (کمانش) تغییر شکل پیدا می کند

۳- کمان ستون

اینکه (7) به هیچ عنوانه شکل تغییر از buckling، اینطوریه؟ (7) میخوره؟

20



۱- کاملاً مستقیم نبوده ستون

وقت برهاس ابعاد و تغییرات
هستند و در P_{cr} تغییر میکنند

۲- کاملاً غیر مستقیم با P

۳- نیروی P کاملاً از مرکز خنثی ستون عبور نمیکند

PAPCO

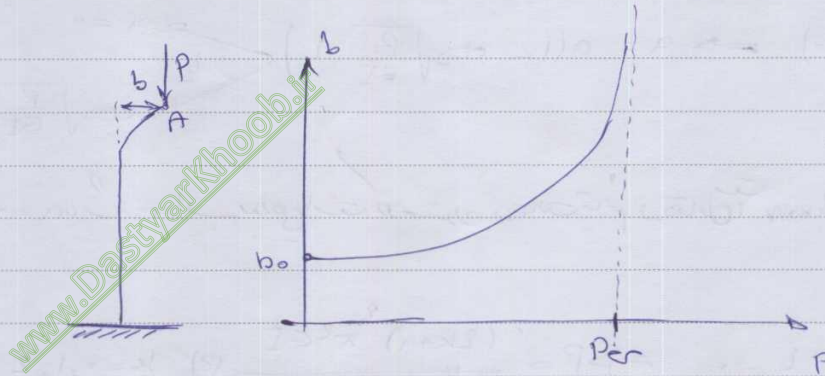


www.Dastyarkhoob.ir

Dastyarkhoob

Subject:

Year: Month: Date: ()

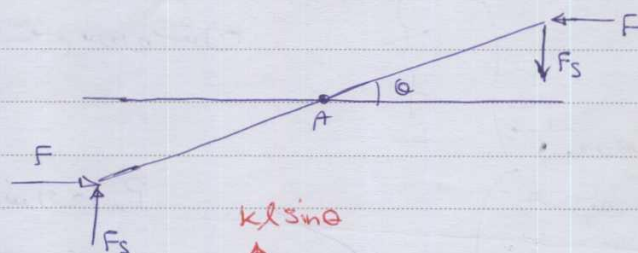
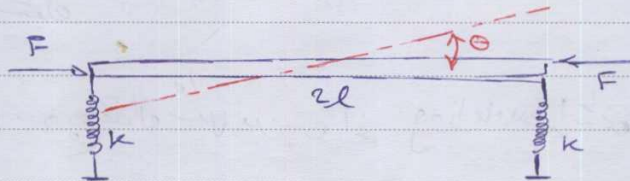


این مقدار P_{cr} متناظر با $\frac{\pi^2 EI}{4l^2}$ است که در ادامه خواهیم دید.

و اگر $P_{cr}(k=0)$ باشد، یعنی در صورتی که ستون کاملاً آزاد باشد.

اما اگر $P < P_{cr}$ باشد، ستون دچار انحراف نمی‌شود.

و اگر $P = P_{cr}$ باشد، ستون در حالت بحرانی قرار می‌گیرد و اگر $P > P_{cr}$ باشد، ستون دچار انحراف می‌شود.



$$\sum M_A = F(2l \sin \theta) - F_s 2l (\cos \theta) = 2l [F \sin \theta - k l \sin \theta \cos \theta]$$

$$F \cos \theta = k l \quad \leftarrow \quad = 2l [F - k l] \quad \theta = 0$$



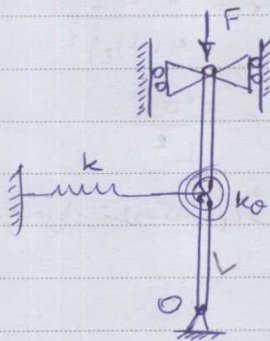
www.DastyarKhoob.ir

DastyarKhoob

Subject :

Year . Month . Date . ()

اگر $F > F_{cr}$ باشد که چپترین و راست‌ترین حالت تعادل خارج از $\theta = 0$ و متقابل است.



$F_{cr} = ?$

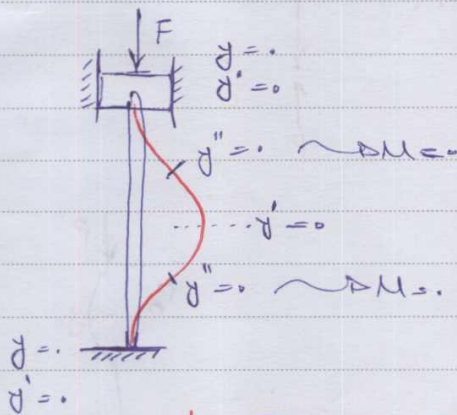
از روش دالامبر

$$F_{cr} = \frac{2k\theta + L^2 k}{L}$$

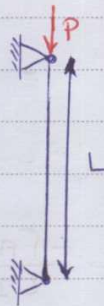
اگر $F = F_{cr}$ باشد هر دو حالت تعادل هم‌اند.

اگر $F < F_{cr}$ باشد تنها $\theta = 0$ حالت تعادل است.

اگر $F > F_{cr}$ باشد که چپ‌ترین و راست‌ترین حالت تعادل متقابل است.



$$F_{cr} = \frac{4\pi^2 EI}{L^2}$$



هیچ عمل جدیدی در اینجا نیست
از نظرات افقی را خنثی کنیم و فقط
نیروی افقی داریم

P4PCO

(5)

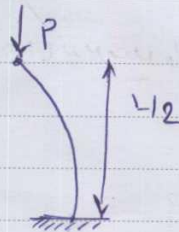


www.DastyarKhoob.ir

DastyarKhoob

Subject: _____

Year: _____ Month: _____ Date: _____ ()



$$\Rightarrow P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4(L/2)^2}$$

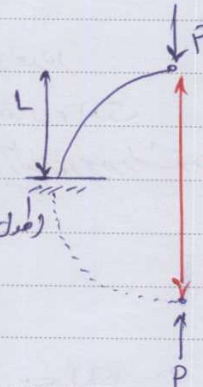
$$\Rightarrow P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

این دو حالت در یک شکل قرار می‌دهیم

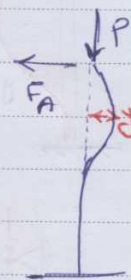
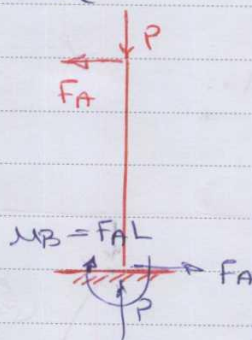
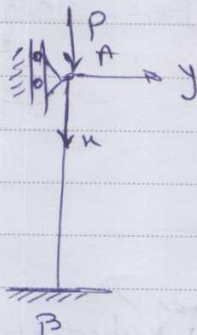


$L_e = L$ (مساوی طول)

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_e^2}$$



$L_e = 2L$



$$M(x) = -(Py + F_A x)$$

$$M(x) = EI \frac{d^2 y}{dx^2}$$

$$\Rightarrow y'' + \frac{P}{EI} y = -\frac{F_A}{EI} x$$

P4PCO



Subject:

Year:

Month:

Date:

()

$$y = A \sin qx + B \cos qx - \frac{Fax}{P}$$

$$y(0) = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$y(L) = 0 \Rightarrow A \sin qL = \frac{FAL}{P}$$

$$y'(L) = 0 \Rightarrow A q \cos qL = \frac{FA}{P}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{q} \tan qL = L$$

$P = P_{cr}$ (انرژی در انتهای ستون برابر با انرژی در انتهای ستون)

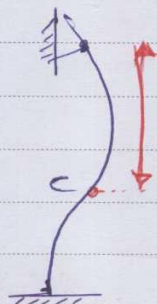
$$qL = 4.49 \text{ rad}$$

در انتهای ستون

$$P = P_{cr} = \frac{20.19 EI}{L^2} \sim \frac{\pi^2 EI}{(0.7L)^2}$$

$$y = \frac{FAL}{P \sin qL} \sin qx - \frac{Fax}{P} \Rightarrow P = P_{cr} \text{ (در انتهای ستون)}$$

ماصل حاصل در انتهای ستون



$$0.7L = L_e$$

طول مؤثر = حاصله از در انتهای ستون

در انتهای ستون

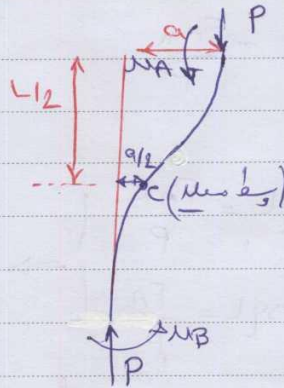
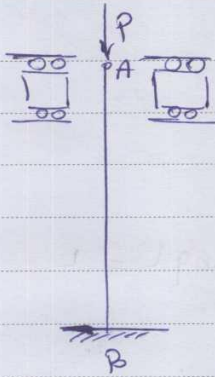


www.DastyarKhoob.ir

DastyarKhoob

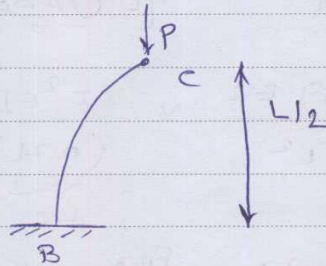
Subject:

Year. Month. Date. ()



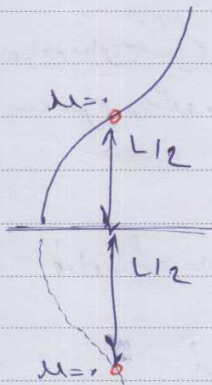
$$M_A = M_B, \quad M_A + M_B = P\delta \Rightarrow M_A = M_B = P\delta/2$$

$$M_C = 0$$

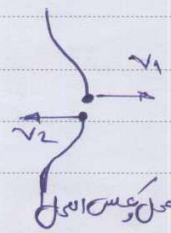
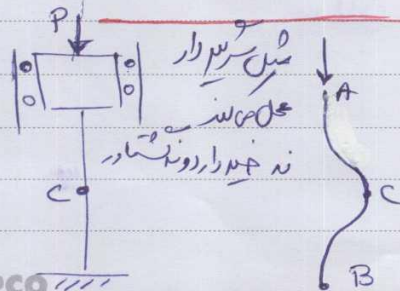


$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4(L/2)^2} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

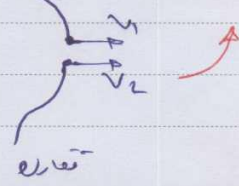
$L_e \leftarrow$



فرض کنیم BC و AC هر دو یک طرفه باشند
یعنی هر دو یک طرفه باشند
 $\Rightarrow L_e = L$



در این صورت نیروی افقی نداریم.



PAPCO

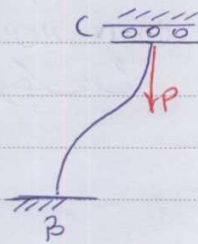


www.DastyarKhoob.ir

DastyarKhoob

Subject:

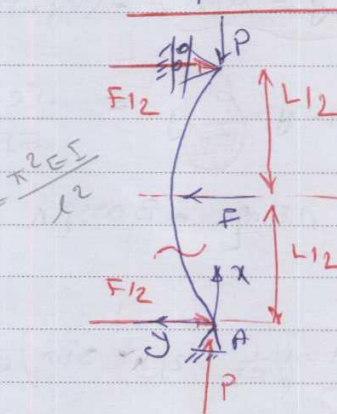
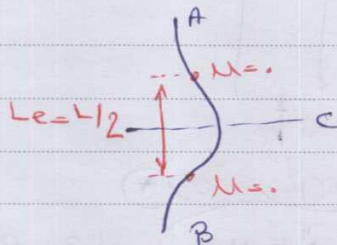
Year: Month: Date: ()



$$L_e = L/2$$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(L/2)^2}$$

نمودار



نمودار
قشر-ستون
نمودار

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

$$EI y'' = M(x)$$

$$M(x) = (P_y + F_{1/2} x)(-1) \quad 0 \leq x \leq L/2$$

$$\Rightarrow y'' + \frac{P}{EI} y = -\frac{1}{EI} \frac{F x}{2}$$

$$\Rightarrow y = A \sin \sqrt{\frac{P}{EI}} x + B \cos \sqrt{\frac{P}{EI}} x - \frac{F x}{2P}$$

$$y(0) = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$y'(L/2) = 0 \Rightarrow A \checkmark$$

$$y(x) = \frac{F}{2P \sqrt{\frac{P}{EI}}} \times \frac{1}{\cos(\sqrt{\frac{P}{EI}} L/2)} \sin \sqrt{\frac{P}{EI}} x - \frac{F x}{2P}$$

$$y_{max} = y(L/2) = \frac{F}{2P \sqrt{\frac{P}{EI}}} \left[\tan(\sqrt{\frac{P}{EI}} L/2) - \sqrt{\frac{P}{EI}} L/2 \right] \quad \alpha \leq L/2$$

P4PCO

$$\textcircled{v} \text{ if } P = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \Rightarrow \sqrt{\frac{P}{EI}} L/2 = \pi/2 \Rightarrow \tan(\sqrt{\frac{P}{EI}} L/2) = \infty$$



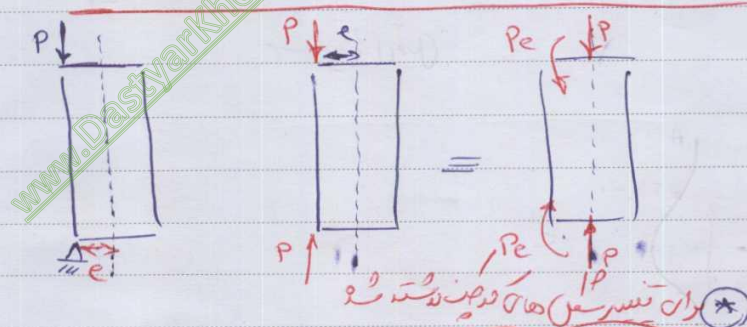
www.DastyarKhoob.ir

DastyarKhoob

Subject:

Year: Month: Date: ()

$\delta_{max} = \infty$ $\Rightarrow$ $P \rightarrow P_{cr}$ $\Rightarrow$ $\delta_{max} \rightarrow \infty$ $\Rightarrow$ $P = \frac{1}{10} P_{cr}$ $\Rightarrow$ $\delta_{max} \rightarrow \infty$



$$EI y'''' = M(x) = -(P_y + P_e)$$

$$\Rightarrow y + \frac{P}{EI} y^2 = -\frac{P_e}{EI}$$

$$\Rightarrow y = A \sin \frac{\pi x}{L} + B \cos \frac{\pi x}{L} - e$$

$$y(0) = 0 \Rightarrow B = e$$

$$y(L) = 0 \Rightarrow A = 0$$

$$\Rightarrow y(x) = e \left[\tan \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{EI}} L \right) \times \sin \sqrt{\frac{P}{EI}} x \right.$$

$$\left. + \cos \left(\sqrt{\frac{P}{EI}} x \right) - 1 \right]$$

$$\delta_{max} = y(L/2) = e \left[\sec \left(\sqrt{\frac{P}{EI}} L/2 \right) - 1 \right]$$

$$= e \left[\sec \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_{cr}}} \right) - 1 \right] \quad (I)$$

$$\delta_{max} \rightarrow \infty \Rightarrow P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

PAPCO

$$P \rightarrow P_{cr} \Rightarrow \delta_{max} \rightarrow \infty$$

(*) $\delta_{max} \rightarrow \infty$ $\Rightarrow$ $P = \frac{1}{10} P_{cr}$ $\Rightarrow$ $\delta_{max} \rightarrow \infty$

Subject:

Year. Month. Date. ()

$$\delta = -\frac{P}{A} + \frac{Mz}{I}$$

[illegible]

حساب تغییرات $\rightarrow |\delta_{\max}| = \frac{P}{A} + \frac{M_{\max} C}{I}$ (I) $A r^2$

[illegible]

$$\mu_{\text{max}} = P_{\text{gmax}} + P_e \Rightarrow |\delta_{\text{max}}| = \frac{P}{A} \left[1 + \frac{(y_{\text{max}} + e)c}{r^2} \right]$$

$$\xrightarrow{(I)} |b_{\max}| = \frac{P}{A} \left[1 + \frac{ec}{r^2} \sec\left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_{er}}}\right) \right]$$

$$= \frac{P}{A} \left[1 + \frac{ec}{r^2} \sec \sqrt{\frac{P}{EI}} L/2 \right]$$

$$\sqrt{\frac{P}{EA}} \frac{L}{2r} \quad \checkmark$$

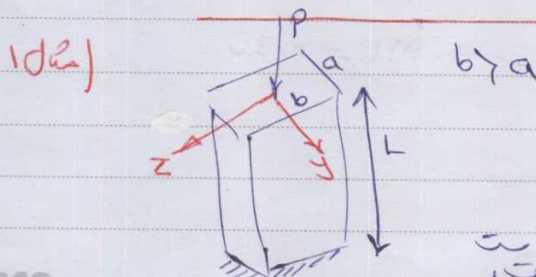
(NP) records P Co's investment in ship building

دیکھو، یہ ہے کہ

خبر از مریدان و اهل

Срьме-

$$\rightarrow |K_{\max}| = \left[1 + \frac{ec}{r^2} \text{ SRC} \sqrt{\frac{P}{E\epsilon}} \frac{Le}{2} \right]$$

$$\frac{\sqrt{P}}{EA} \quad \frac{Le}{2r}$$


$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{L_e^2}$$

دست‌نویس / نسخه ۲ / اسرار حسنه باب ۱

دروغہ ایک دھوکہ ہے، دروغ گو ایک چوڑا منہ ہے



www.DastyarKhoob.ir

DastyarKhoob

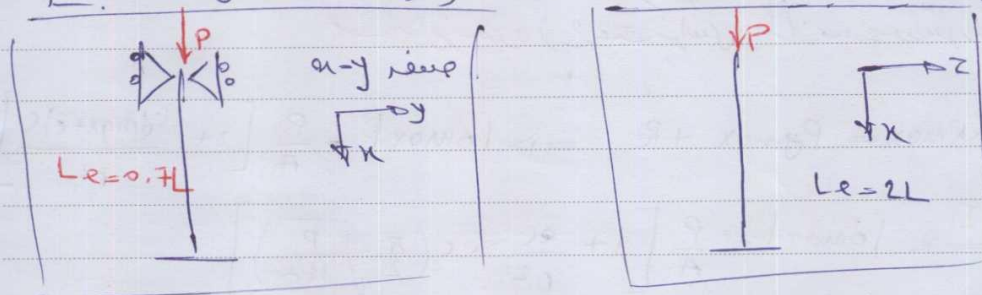
Subject:

Year: Month: Date: ()

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E I_{min}}{L_e^2} = \frac{\pi^2 E (\frac{1}{12} b a^3)}{(2L)^2}$$

گرایش در صفحه ی آنست

مسئله 2) اگر یک ستون به اندازه یک حرکت در راستای آزاد و در راستای دیگر محدود باشد



$$P_{cr} = \min \left(\frac{\pi^2 E I_{zz}}{(L_e)_{ny}^2} + \frac{\pi^2 E I_{yy}}{(L_e)_{xz}^2} \right)$$

$$\Rightarrow P_{cr} = \pi^2 E \min \left(\frac{I_{zz}}{(0.7L)^2} + \frac{I_{yy}}{(2L)^2} \right)$$

$$P_{cr} = \pi^2 E A \min \left(\frac{r_z^2}{(L_e)_{ny}^2} + \frac{r_y^2}{(L_e)_{xz}^2} \right)$$

$$\frac{I_{zz}}{(0.7)^2} = \frac{I_{yy}}{2^2} \quad \leftarrow \text{برای پیدا کردن (استرین) در مسئله 2}$$

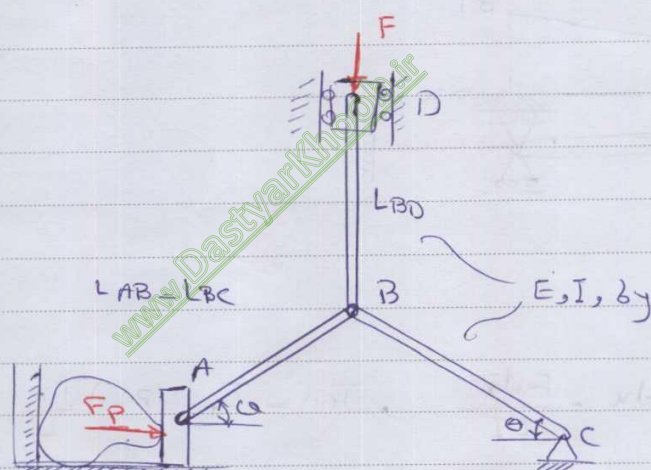
$$\Rightarrow \frac{\frac{1}{12} b a^3}{(0.7)^2} = \frac{\frac{1}{12} a b^3}{2^2} \Rightarrow a/b = 0.35$$



www.Dastyarkhoob.ir

Dastyarkhoob

Month . Date . ()



$$AB, BC \Rightarrow F = \frac{F_p}{\cos \theta} \rightarrow (1) \quad \frac{F_p}{\cos \theta \times A} \leq \delta_y \Rightarrow F_p \leq \delta_y A \cos \theta$$

$$(2) \quad \frac{F_p}{\cos \theta} \leq \frac{\pi^2 EI}{L_{BC}^2}$$

$$\Rightarrow F_p \leq \frac{\pi^2 EI}{L_{BC}} \cos \theta$$

$$BD \Rightarrow F = 2F_p \tan \theta \rightarrow (1) \quad \frac{2F_p \tan \theta}{A} \leq \delta_y \Rightarrow F_p \leq \dots$$

$$(2) \quad 2F_p \tan \theta \leq \frac{\pi^2 EI}{L_{BD}^2} \Rightarrow F_p \leq \dots$$

$$F_p \leq \min \{$$

$$\max(F) = 2F_p \tan \theta$$

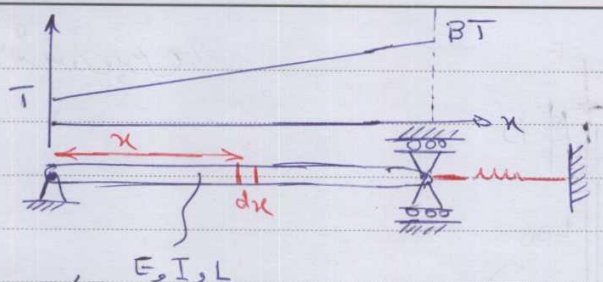
P4PCO

(4)



Subject :

Year . Month . Date . ()



T linear?

$$d\delta = \alpha T(x) dx - \frac{F dx}{EI}, \quad T(x) = T + (\beta - 1) \frac{T x}{L}$$

$$\Delta = \int_0^L d\delta = \int_0^L \alpha T \left(1 + (\beta - 1) \frac{x}{L} \right) dx - \frac{F L}{AE}$$

$$\Rightarrow \Delta = \alpha T \left(L + \frac{(\beta - 1)L}{2} \right) - \frac{F L}{AE}$$

$$\Rightarrow \Delta = \frac{F L}{k} \Rightarrow F L = \alpha T \left(\frac{2L + (\beta - 1)L}{2} \right) \times \left(\frac{k A E}{L + A E} \right) \leq \frac{\pi^2 E I}{L^2}$$

$$\Rightarrow T \leq \left(\frac{\pi^2 E I}{L^2} \right) \left(\frac{L + A E}{k A E} \right) \left(\frac{2}{\alpha L (\beta + 1)} \right)$$



Subject: _____

Year: _____ Month: _____ Date: _____

محدودیت‌های ستون

$$\begin{aligned} & (\delta_{max} = P/A + \frac{M_{max}c}{I}) < \delta_y \quad \text{ظرفیت ستون (محدودیت)} \\ & P < (P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_e^2}) \end{aligned}$$

$$P < P_{cr} \Rightarrow \frac{P}{A} < \frac{P_{cr}}{A} \quad \delta_{cr}$$

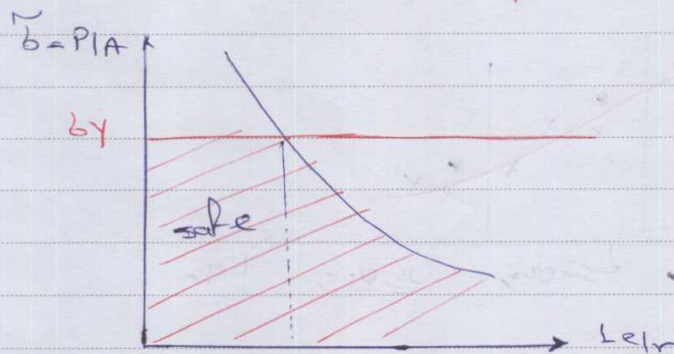
$$\delta = \delta_{cr} \Leftrightarrow P = P_{cr}$$

$$\delta_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 EI}{A L_e^2} \xrightarrow{A = \pi r^2} = \frac{\pi^2 E}{(\frac{L_e}{r})^2}$$

slender ratio : $\frac{L_e}{r}$

برای ستون‌ها نسبت طول به شعاع گردان باید کمتر باشد $\delta_{max} < \delta_y$

برای ستون‌ها نسبت بار به مساحت باید کمتر باشد $\delta < \delta_{cr}$



$$\delta_{max} = \frac{P}{A} \left[1 + \frac{ec}{r^2} \sec \left(\sqrt{\frac{P}{EI}} \frac{L_e}{2} \right) \right]$$

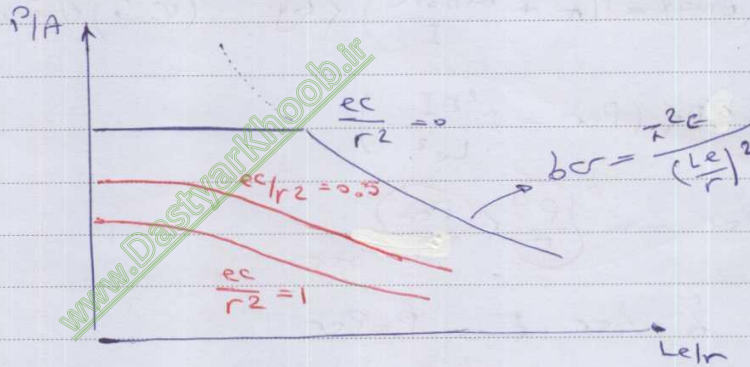


www.DastyarKhoob.ir

DastyarKhoob

Subject :

Year . Month . Date . ()

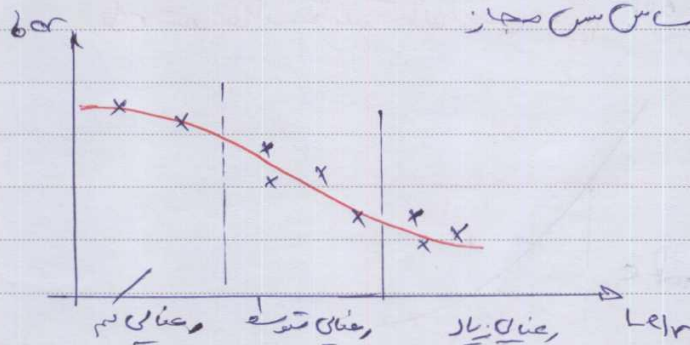


وقتی ضریب انحراف را کم کنیم (یعنی) مقدار تسلیم هستیم

جرای سازه (برای سازه فولاد) تقریبی :

الف) جابجایی موزون

الف (ب) : جرای برای سازه سازه



$$P/A \leq \frac{1}{F.S} bc_{ball}$$

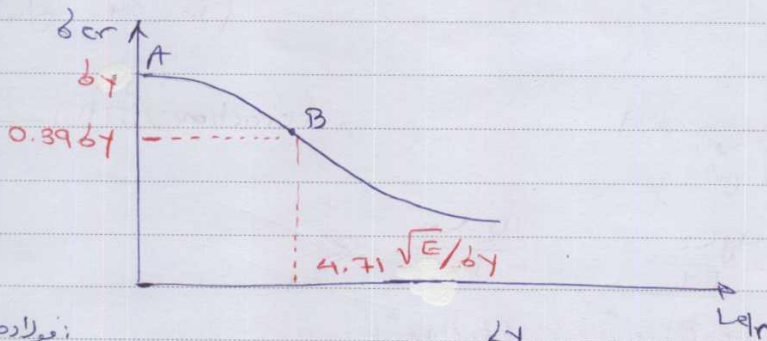


www.DastyarKhoob.ir

DastyarKhoob

Subject :

Year . Month . Date . ()



مورد دوم:

$$\delta_{cr} = \left[0.658 \frac{\delta_\gamma}{\delta_e} \right] \delta_\gamma$$

$$\delta_e = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{L_e}{r} \right)^2}$$

$$\delta_{cr} = 0.877 \delta_e$$

$$\delta_{crB} = 0.396 \delta_\gamma$$

$$\left(\frac{L_e}{r} \right)_B = 4.71 \sqrt{\frac{E}{\delta_\gamma}}$$

$$F.S = 1.67$$

مسئله ۱۰-۵۲ کتاب

الف (II) برای ستون با بار دایره ای متوزع بر سطح مقطع مجزا:

ب - برای ستون تحت بار خارج از مرکز با بار دایره ای متوزع بر سطح مقطع مجزا:

$$\frac{P}{A} + \frac{M_c}{I} = \delta_{all}$$

ج (I) مؤثر تنش مجزا:

P4PCO

(II)

حاله انحراف نیست به محدوده کشش و فشرش محدود است این حالت



www.DastyarKhoob.ir

DastyarKhoob

Subject:

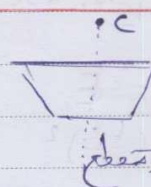
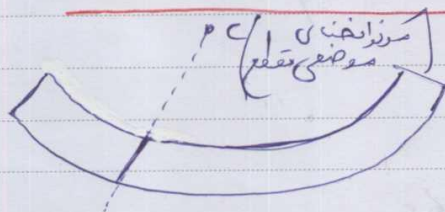
Year: Month: Date: ()

شماره 10-04

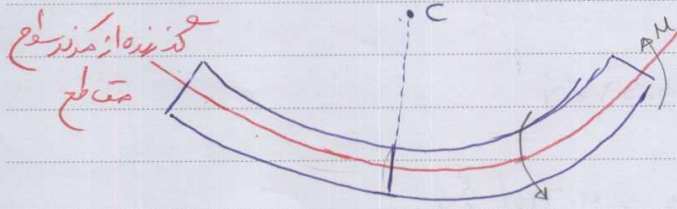
$$\frac{PIA}{(ball)_{\text{عصب}}} + \frac{\frac{Mc}{I}}{(ball)_{\text{عصب}}} = 1$$

interaction (II) $\rightarrow$

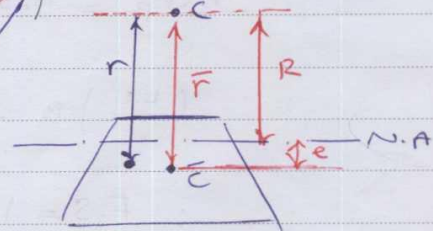
$$\frac{PIA}{(ball)_{\text{عصب}}} + \frac{\frac{MyCz}{Iy}}{(ball)_{\text{عصب}}} + \frac{\frac{MzCy}{Iz}}{(ball)_{\text{عصب}}} = 1$$



تشریح عصب:



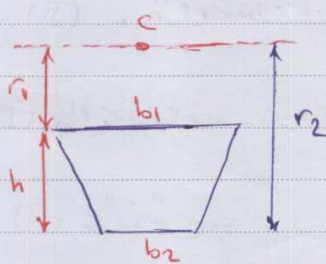
محور تقاطع از مرکز انحنای تقاطع



$$R = \frac{A}{\int \frac{dA}{r}}$$

$$\bar{r} > R$$

$$\bar{r} - R = e$$



$$R = \frac{1/2 h^2 (b_1 + b_2)}{(b_1 r_2 - b_2 r_1) \ln \frac{r_2}{r_1} - h (b_1 - b_2)}$$

PAPCO

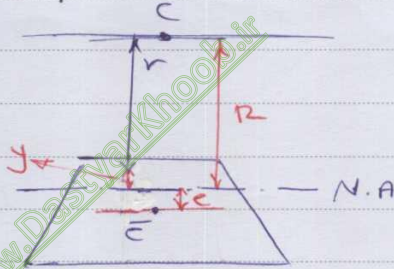


www.DastyarKhoob.ir

DastyarKhoob

Subject :

Year . Month . Date . ()



$$b = - \frac{My}{Ae(R-y)}$$

$\downarrow$
 $R-R$

$$b = - \frac{M(R-r)}{Aer}$$

$$\frac{1}{R'} - \frac{1}{R} = \frac{M}{EAeR}$$

از این دو معادله می توان نوشت:



www.DastyarKhoob.ir

DastyarKhoob

